DM 10

Chapitre 10

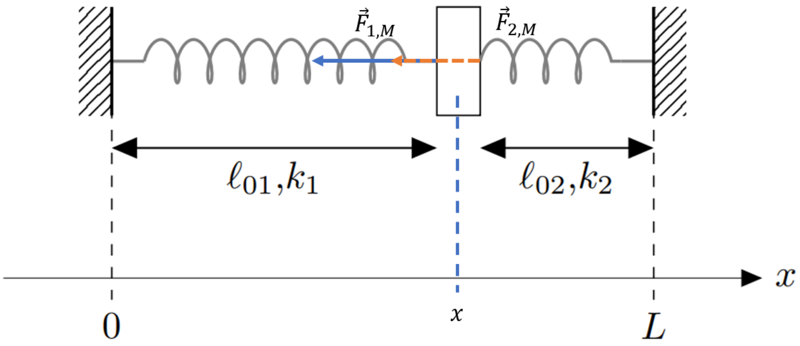
Ressorts couplés

Un oscillateur harmonique un peu plus complexe que le ressort habituel mais pas moins classique.

1/ Assimilons le mobile à un point M repéré par sa cote M. Le mobile est soumis à son poids $\overrightarrow{P}$, la réaction du support $\overrightarrow{R}$, à l'action du ressort de droite et à celle de celui de gauche. On considèrera par la suite que la réaction du support et le poids se compensent dans la mesure où le mouvement du ressort est horizontal.

2/ Il nous faut exprimer les forces exercées par les ressorts/ L'expression générale de la loi de Hooke est $\overrightarrow{F} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_{ext}$ avec ℓ la longueur du ressort, ℓ_0 sa longueur à vide et $\vec{u}_{ext}$ le vecteur unitaire orienté du point d'attache du ressort vers l'extrémité libre :

- Force exercée par le ressort de gauche. Ici, $\ell = x$, $\ell_0 = \ell_{0,1}$ et $\vec{u}_{ext} = \vec{e}_x$: $\overrightarrow{F}_{1/M} = -k_1(x - \ell_{0,1})\vec{e}_x$
- Force exercée par le ressort de droite. Ici, $\ell = L - x$, $\ell_0 = \ell_{0,2}$ et $\vec{u}_{ext} = -\vec{e}_x$: $\overrightarrow{F}_{2/M} = k_2\left((L-x) - \ell_{0,2}\right)\vec{e}_x$



3/ Le mobile est étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On peut donc lui appliquer le principe fondamental de la dynamique :

$$m\vec{a} = \overrightarrow{F}_{1/M} + \overrightarrow{F}_{2/M}$$

avec $\vec{a}$ le vecteur accélération du point M : $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x$, on considère que le mouvement est unidimensionnel. Projetons cette relation sur $\vec{e}_x$:

$$m\ddot{x} = -k_1(x - \ell_{0,1}) + k_2\left((L-x) - \ell_{0,2}\right)$$

On en déduit donc :

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{k_1 + k_2}{m}x = \frac{k_1\ell_{0,1} + k_2(L - \ell_{0,2})}{m}} \quad (E)$$

On compare cette équation à celle obtenue pour un système masse-ressort (k, ℓ_0) simple :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}\ell_0$$

Les deux équations sont de la même forme. Le système qu'on étudie est donc équivalent à un seul ressort de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 obtenus en identifiant :

$$\boxed{k = k_1 + k_2} \quad \text{et} \quad \boxed{\ell_0 = \frac{k_1\ell_{0,1} + k_2(L - \ell_{0,2})}{k_1 + k_2}}$$

4/ Lorsque le mobile atteint sa position d'équilibre, $\ddot{x} = 0$, ainsi, on obtient :

$$\boxed{x_{\text{éq}} = \frac{k_1\ell_{0,1} + k_2(L - \ell_{0,2})}{k_1 + k_2} = \ell_0}$$

5/ On peut alors modifier (E) ainsi :

$$\ddot{x}' + \omega_0^2 x' = 0 \quad (E')$$

où $x' = x - x_{\text{éq}}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}$.

L'équation (E') est une équation différentielle harmonique homogène, les solutions sont donc de la forme :

$$x'(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

où A et B sont deux réels.

On en déduit donc $\boxed{x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + x_{\text{éq}}}$

6/ Les conditions initiales données dans l'énoncé sont les suivantes :

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = -v_0 \quad \text{vers la gauche} \end{cases}$$

Il faut donc utiliser l'expression trouvée à la question précédente pour trouver les expresssions des constantes :

$$\dot{x}(t) = -A\omega_0\sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t)$$

$$\begin{cases} x(0) = A\cos(\omega_0 \times 0) + B\sin(\omega_0 \times 0) + x_{\text{éq}} = x_0 \\ \dot{x}(0) = -A\omega_0\sin(\omega_0 \times 0) + B\omega_0\cos(\omega_0 \times 0) = -v_0 \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} A = x_0 - x_{\text{éq}} \\ B = -\dfrac{v_0}{\omega_0} \end{cases}$$

On en déduit donc l'expression suivante de x :

$$\boxed{x(t) = (x_0 - x_{\text{éq}})\cos(\omega_0 t) - \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) + x_{\text{éq}}}$$

L'amplitude de x est donnée par : $C = (x_0 - x_{\text{éq}})^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}$.

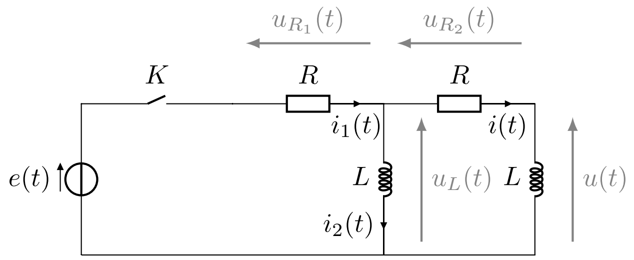
Sa phase initiale est la suivante : $\varphi = \arctan\left(\dfrac{v_0}{\omega_0(x_0 - x_{\text{éq}}}\right)$

7/ Pour $x_0 = x_{\text{éq}}$ et $v_0 = 0$, on obtient : $x(t) = x_{\text{éq}}$. Le mobile reste en sa position d'équilibre, ouf !

Cellules RL

Cet exercice est très intéressant à traiter pour s'entraîner à établir des conditions initiales dans un circuit. De plus, l'établissement de l'équation différentielle n'est pas non plus évidente.

1/ Pour établir l'équation différentielle, définissons quelques grandeurs sur le circuit :



Considérons le cas où la tension fournie par le générateur soit sinusoïdale. On utilise alors les notations complexes $\underline{e}$ et $\underline{i}$ associées à la tension fournie par le générateur et à l'intensité i.

La loi des mailles appliquée à la grande maille donne $\underline{e} = \underline{u} + \underline{u}_{R_1} + \underline{u}_{R_2}$
Soit, grâce à la loi d'Ohm : $\underline{e} = \underline{u} + R\underline{i}_1 + R\underline{i}$
L'impédance de la bobine donne :

$$\underline{e} = \mathrm{j}\omega L\underline{i} + R\underline{i}_1 + R\underline{i}$$

La loi des nœuds s'écrit : $\underline{i}_1 = \underline{i} + \underline{i}_2$ Soit :

$$\underline{e} = \mathrm{j}\omega L\underline{i} + R\underline{i} + R\underline{i}_2 + R\underline{i}$$

De plus, en exprimant l'impédance de la bobine de gauche :

$$\underline{e} = \mathrm{j}\omega L\underline{i} + R\underline{i} + \frac{R\underline{u}_L}{\mathrm{j}\omega L} + R\underline{i}$$

La loi des mailles dans la maille de droite donne :

$$\underline{e} = \mathrm{j}\omega L\underline{i} + R\underline{i} + R\frac{\underline{u} + \underline{u}_{R_2}}{\mathrm{j}\omega L} + R\underline{i}$$

La loi d'Ohm et l'impédance de la bobine de droite permettent d'écrire :

$$\underline{e} = \mathrm{j}\omega L\underline{i} + R\underline{i} + R\frac{\mathrm{j}\omega L\underline{i} + R\underline{i}}{\mathrm{j}\omega L} + R\underline{i}$$

La mise au même dénominateur, du membre de droite donne :

$$\underline{e} = \frac{(\mathrm{j}\omega L)^2\underline{i} + \mathrm{j}\omega RL\underline{i} + \mathrm{j}\omega RL\underline{i} + R^2\underline{i} + \mathrm{j}\omega RL\underline{i}}{\mathrm{j}\omega L}$$

Finalement :

$$\mathrm{j}\omega L\underline{e} = (\mathrm{j}\omega L)^2\underline{i} + 3\mathrm{j}\omega RL\underline{i} + R^2\underline{i}$$

Sachant que chaque produit $\mathrm{j}\omega$ équivaut à une dérivée sur un signal complexe :

$$L\frac{d\underline{e}}{dt} = L^2\frac{d^2\underline{i}}{dt} + 3RL\frac{d\underline{i}}{dt} + R^2\underline{i}$$

En repassant sur des signaux réels, on obtient :

$$L\frac{de}{dt} = L^2\frac{d^2i}{dt^2} + 3RL\frac{di}{dt} + R^2i$$

Cette équation différentielle ne dépend pas de la forme de l'entrée, elle est donc correcte. Revenons au signal qui nous intéresse dans notre sujet. Pour $t > 0$, la tension fournie par le générateur est constante donc $\frac{de}{dt} = 0$, l'équation différentielle devient donc :

$$L^2\frac{d^2i}{dt^2} + 3RL\frac{di}{dt} + R^2i = 0$$

En divisant par L^2 et en posant $\tau = \frac{L}{R}$, on obtient :

$$\boxed{\frac{d^2i}{dt^2} + 3\frac{1}{\tau}\frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau^2}i = 0}$$

2/ On peut mettre cette équation sous la forme canonique suivante :

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0$$

Avec $\omega_0 = \frac{1}{\tau}$ et $Q = \frac{1}{3}$. Le facteur de qualité est inférieur à $\frac{1}{2}$, on en déduit donc que le régime est **apériodique**.

3/ L'équation différentielle est homogène, on en déduit donc que les solutions sont de la forme :

$$i(t) = \left(Ae^{\Omega t} + Be^{-\Omega t}\right)e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}$$

avec $\Omega = \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$ et A et B deux constantes réelles.

4/ (a) Avant fermeture de l'interrupteur, aucun courant ne circule dans le circuit donc $i(0^-) = 0$. Par continuité du courant traversant la bobine, $i(0^+) = i(0^-) = 0$.

(b) Utilisons à nouveau les notations introduites à la question 1/. La loi des mailles appliquée à la grande maille donne : $E = u_{R_1}(0^+) + u_{R_2}(0^+) + u(0^+)$.

La loi des nœuds donne : $i_1(0^+) = i_2(0^+) + i(0^+)$. Or, avant $t = 0$, aucun courant ne circulant dans le circuit donc $i_2(0^-) = 0$. Par continuité du courant traversant la bobine, $i_2(0^+) = 0$. On en déduit donc que $i_1(0^+) = 0$.

On en déduit donc que $u_{R_1}(0^+) = \dfrac{i_1(0^+)}{R} = 0$ et $u_{R_2}(0^+) = \dfrac{i(0^+)}{R} = 0$. Ainsi, la loi des mailles donnée précédemment permet d'affirmer que :

$$\boxed{u(0^+) = E}$$

(c) La loi de la bobine permet d'écrire : $u(0^+) = L\dfrac{di}{dt}(0^+)$. On en déduit donc que :

$$\boxed{\frac{di}{dt}(0^+) = \frac{E}{L}}$$

(d) L'équation différentielle établie à la question 1/ évaluée en $t = 0^+$ donne :

$$\frac{d^2i}{dt^2}(0^+) + 3\frac{1}{\tau}\frac{di}{dt}(0^+) + \frac{1}{\tau^2}i(0^+) = 0$$

D'après les relations précédentes, on a donc :

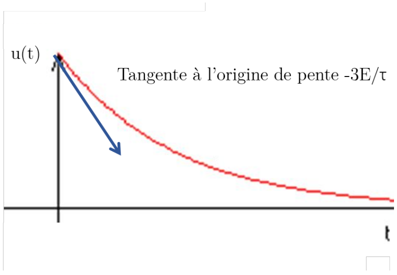
$$\frac{d^2i}{dt^2}(0^+) = -\frac{3E}{\tau L}$$

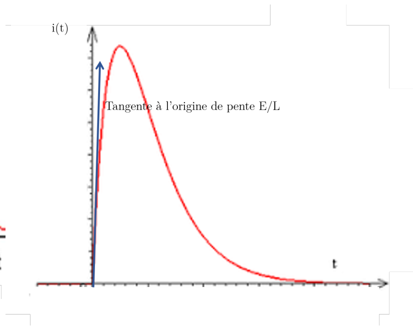
Or, d'après la loi de la bobine : $\boxed{\dfrac{du}{dt}(0^+) = L\dfrac{d^2i}{dt^2}(0^+) = -\dfrac{3E}{\tau}}$

5/ Au bout d'un temps très long, le circuit a atteint un régime permanent. On peut donc considérer que la bobine se comporte comme un interrupteur fermé donc $\boxed{u(t) = 0}$ au bout d'un temps très long.

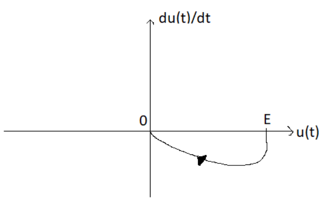
Par le même raisonnement, $u_L(t) = 0$ au bout d'un temps très long. La loi des mailles appliquée à la maille de droite permet alors d'écrire $u_{R_2}(t) = 0$. La loi d'Ohm donne alors $\boxed{i(t) = 0}$.

6/ Les évolutions de $i(t)$, $u(t)$ et de la trajectoire de phase sont les suivantes :





7/



8/ L'énergie stockée dans la bobine de droite $\Delta\mathcal{E}_{L_1} = \mathcal{E}_{L_1}(t) - \mathcal{E}_{L_1}(0)$ avec $t \gg \frac{2Q}{\omega_0}$ (expression du temps "très long") s'exprime en fonction de l'inductance et de l'intensité la traversant :

$$\Delta\mathcal{E}_{L_1} = \frac{1}{2}Li^2(t) - \frac{1}{2}Li^2(0) = 0$$

D'après les réponses aux questions **22/** et **23/**.

L'énergie stockée dans la bobine de gauche $\Delta\mathcal{E}_{L_2} = \mathcal{E}_{L_2}(t) - \mathcal{E}_{L_1}(0)$ avec $t \gg \frac{2Q}{\omega_0}$ est donnée par :

$$\Delta\mathcal{E}_{L_2} = \frac{1}{2}Li_2^2(t) - \frac{1}{2}Li_2^2(0)$$

Or, on a vu en question **22/** que $i_2(0^+) = 0$.
De plus, au bout d'un temps très long, $u_L(t) = 0$ car la bobine se comporte comme un fil. La loi des mailles appliquée à la maille de gauche donne : $E = u_{R_1}(t) = Ri_1(t)$.
Au bout d'un temps très long, $i(t) = 0$. La loi des mailles nous permet alors d'affirmer que $i_2(t) = i_1(t) = \dfrac{E}{R}$.

On en déduit donc que l'énergie stockée dans la bobine au bout d'un temps très long vaut :

$$\boxed{\Delta\mathcal{E}_{L_2} = \frac{1}{2}\frac{L}{R^2}E^2}$$