Chapitre 8 : Systèmes linéaires du premier ordre

Nous l'avons vu aux chapitres 4 et 7, certaines équations décrivant l'évolution de systèmes rencontrés sont des équations différentielles linéaires.

L'objet de ce chapitre est de mettre en place la méthode de résolution d'équations physiques différentielles linéaires du 1^{er} ordre. Nous essaierons d'adjoindre à cette méthode quelques remarques sur le sens physique des résultats obtenus mais ici, la question principale n'est pas tant à la réflexion conceptuelle qu'à l'efficacité calculatoire.
Ce n'est qu'en acquérant une aisance mathématique suffisante que vous pourrez prendre suffisamment de recul pour appréhender la phénoménologie des situations rencontrées.

Question

I - Charge d'un condensateur

A Étude expérimentale

⇝ Que fait-on ?

Définition
Échelon de tension :

Remarques :

⇝ Qu'observe-t-on ?

DÉFINITION
Réponse indicielle :

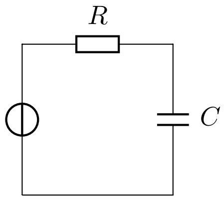
Vocabulaire :

RÉGIMES D'ÉVOLUTION D'UN SYSTÈME

Remarques :

B Modélisation de la situation

1 Établissement de l'équation différentielle



2 Forme canonique de l'équation différentielle

Durée caractéristique

Forme canonique de l'équation

La **forme canonique** d'une équation différentielle linéaire du premier ordre est :

Remarque :

C Prévision de l'état final du système

MÉTHODE : PRÉVOIR L'ÉTAT FINAL POUR UN CIRCUIT DU 1ER ORDRE

D Résolution de l'équation différentielle

Reprenons l'équation (E) :

$$\text{Pour } t > 0, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{u(t)}{\tau} = \frac{E}{\tau} \qquad \text{avec } \tau = RC$$

MÉTHODE : RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU PREMIER ORDRE

1/ Déterminer la condition initiale à l'aide des propriétés de continuité de la tension aux bornes du condensateur ou de l'intensité traversant une bobine.

2/ Identifier le domaine temporel de résolution de l'équation

3/ Déterminer TOUTES les solutions de l'équation $\rightsquigarrow u = u_h + u_p$

4/ À l'aide de la condition initiale, on obtient la solution du problème physique

Remarques :

Retour sur l'exemple :

Remarque :

E Représentation graphique

Remarques :

Obtention graphique de la constante de temps

Remarques :

F Évolution de l'intensité

⚠ Remarques importantes :

G Bilans énergétiques

MÉTHODE : RÉALISATION D'UN BILAN ÉNERGÉTIQUE DANS UN CIRCUIT RC

1/ Appliquer la loi des mailles au circuit

2/ Multiplier les deux membres de l'équation obtenue par i l'intensité circulant dans le circuit

3/ Identifier chaque terme de la relation obtenue en termes de puissance fournie ou reçue (on pourra s'aider des lois des dipôles)

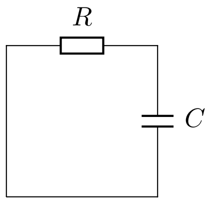
4/ Intégrer par rapport au temps pour obtenir un bilan énergétique

Retour sur l'exemple :

Équirépartition de l'énergie dans un circuit RC

II - Décharge du condensateur

Application directe n°1 : Décharge d'un condensateur



On considère un condensateur chargé à une tension E que l'on insère à $t = 0$ dans le circuit ci-contre.
Faire l'étude complète de sa décharge (équation différentielle, résolution, tracé de u_c et bilan énergétique).

A Équation différentielle

Forme canonique de l'équation différentielle pour la décharge

Définition
Régime libre :

B Aspects énergétiques

Étude énergétique de la décharge d'un condensateur

C Portrait de phase

Remarques :

III - Étude d'un circuit RL

A Équation différentielle canonique

FORME CANONIQUE DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE POUR LA CHARGE DU CIRCUIT RL

CONSTANTE DE TEMPS

Remarque :

B Aspects énergétiques

ÉTUDE ÉNERGÉTIQUE DE LA CHARGE DU CIRCUIT RL

Remarque :

IV - Analogie mécanique : Chute d'une bille dans un fluide visqueux

A Observations expérimentales

Application directe n°2 : Chute avec frottements

On considère un point M en mouvement dans le champ de pesanteur terrestre et subissant des frottements du fluide dans lequel il tombe. Ce point est lâché d'une position M_0 avec une vitesse $\vec{v}_0$ verticale orientée vers le bas à l'instant $t = 0$.
On note ρ_f la masse volumique du fluide et ρ_b la masse volumique de la bille.

1/ Établir l'équation verticale du mouvement du point M pour le modèle de frottements fluides linéaire avec la vitesse. On note λ le coefficient de frottements du fluide considéré.

2/ Résoudre cette équation pour en déduire une expression temporelle de la vitesse du point M.

3/ Retrouver l'expression de la vitesse limite atteinte par le point M.

B Établissement de l'équation du mouvement sur v

Forme canonique de l'équation différentielle pour la vitesse

Constante de temps

Remarque :

⚠ Remarques importantes :

C Résolution de l'équation

Solution de l'équation

⚠ Remarques importantes :

Remarque :

D Retour sur l'expérience