Chapitre 5 : Cinématique du point

Il est difficile de dater la naissance de la mécanique à proprement parler tant elle participe à la description de phénomènes quotidiens. Est-ce avec Aristote et sa science du mouvement par contact ? Archimède et son étude de l'équilibre des corps ? Galilée et son principe d'inertie ? Ou encore Newton et ses trois lois ? Ces grands noms ont tous participé à l'édification du modèle que nous connaissons aujourd'hui.
C'est bien ce caractère quotidien justement qui confère à la mécanique une place centrale dans les études de tout ingénieur ou physicien.

Dans ce premier chapitre, nous nous attacherons à construire les éléments théoriques de description du mouvement d'un corps. La maîtrise des outils introduits ici est ainsi fondamentale afin de pouvoir raisonner de manière rigoureuse dans la suite.

Question

I - Outils d'étude du mouvement

Définition
Cinématique : Étude des mouvements d'un corps indépendamment de leurs causes.

Point matériel :

Remarque :

A Référentiels

Définition
Référentiel :

Remarque :

DÉFINITION
Référentiel galiléen :

Remarque :

Exemples :

Référentiel	**Référentiel terrestre**	**Référentiel géocentrique**	**Référentiel héliocentrique**
Référence			
Limites du du caractère galiléen			
Mouvements qu'il permet d'étudier			

ABSOLUITÉ DU TEMPS

Remarque : C'est un des postulats de la mécanique classique. Ce postulat a été mis en défaut par plusieurs expériences conduisant à l'élaboration de la mécanique relativiste au début du XX$^{\text{è}}$ siècle.

B Grandeurs vectorielles caractéristiques

Soit O un point fixe du référentiel d'étude $\mathcal{R}$ et M un point matériel dont on souhaite étudier le mouvement. On définit :

Vecteur position :

Vecteur déplacement élémentaire :

Vecteur vitesse :

Vecteur accélération :

II - Repérage d'un point

⚠ Remarque importante :

A Repérage dans le plan

1 Coordonnées cartésiennes

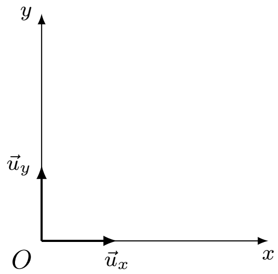
Définition

Repère cartésien : Le repère **cartésien** est composé d'une origine souvent notée O et d'une base orthonormée directe, décrite par les vecteurs unitaires $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$. Il est **fixe** par rapport au référentiel d'étude.

<ins>Remarque</ins> : La base est fixe par rapport au référentiel d'étude, on peut donc écrire :

Vecteurs cinématiques cartésiens du plan

Soit M un point matériel et $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ un repère orthonormé cartésien direct. Les grandeurs cinématiques caractérisant M s'expriment ainsi :



2 Coordonnées polaires

Définition

Repère polaire :

<ins>Remarque</ins> :

APPLICATION DIRECTE N°1

1/ Exprimer $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ en fonction de $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$.

2/ Exprimer x et y en foncton de r et θ.

3/ Exprimer r et θ en fonction de x et y.

⚠ Remarque importante :

DÉRIVÉE DES VECTEURS DE BASE

VECTEURS CINÉMATIQUES D'UN POINT REPÉRÉ EN COORDONNÉES POLAIRES

B Repérage dans l'espace

1 Coordonnées cartésiennes

DÉFINITION

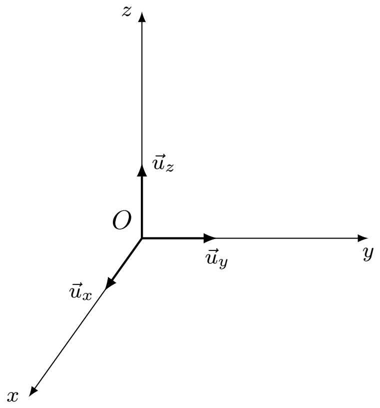
Repère cartésien : Le repère **cartésien** est composé d'une origine souvent notée O et d'une base orthonormée directe, décrite par les vecteurs unitaires $(\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$. Il est **fixe** par rapport au référentiel d'étude.

Remarque : La base est fixe par rapport au référentiel d'étude, on peut donc écrire :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{u}_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{u}_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{u}_z}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$$

Vecteurs cinématiques cartésiens de l'espace

Soit M un point matériel et $(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$ un repère orthonormé cartésien direct. Les grandeurs cinématiques caractérisant M s'expriment ainsi :



Le vecteur déplacement élémentaire se déduit de l'expression de la vitesse :

Déplacement élémentaire en coordonnées cartésiennes

L'expression du vecteur déplacement élémentaire en coordonnées cartésiennes est :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}x\vec{u}_x + \mathrm{d}y\vec{u}_y + \mathrm{d}z\vec{u}_z$$

Les vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération en coordonnées cartésiennes exprimés sur la base $(\vec{u}_x,\ \vec{u}_y,\ \vec{u}_z)$ sont respectivement :

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} \qquad \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

2 Coordonnées cylindriques

Définition

Repère cylindrique :

Vecteurs cinématiques d'un point repéré en coordonnées cylindriques

Le vecteur déplacement élémentaire se déduit de l'expression de la vitesse :

Déplacement élémentaire en coordonnées cylindriques

L'expression du vecteur déplacement élémentaire en coordonnées cylindriques est :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\vec{u}_r + r\mathrm{d}\theta\vec{u}_\theta + \mathrm{d}z\vec{u}_z$$

Les vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération en coordonnées cylindriques exprimés sur la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ sont respectivement :

$$\overrightarrow{OM} = \left(\quad \right) \qquad \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \left(\quad \right) \qquad \vec{v} = \left(\quad \right) \qquad \vec{a} = \left(\quad \right)$$

On retient également que :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}t} = \\ \dfrac{\mathrm{d}\vec{u}_\theta}{\mathrm{d}t} = \end{cases}$$

3 Coordonnées sphériques

Définition

Repère sphérique :

Remarques :

APPLICATION DIRECTE N°2

Exprimer x, y et z en fonction de r, θ et φ.

C Vecteur déplacement élémentaire

1 Coordonnées cartésiennes

Raisonnons à **deux dimensions** :

Lorsque x varie de dx à y fixé, le déplacement a lieu selon le vecteur $\vec{u}_x$ et vaut $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}x\vec{u}_x$.
Lorsque y varie de dy à x fixé, le déplacement a lieu selon le vecteur $\vec{u}_y$ et vaut $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}y\vec{u}_y$.

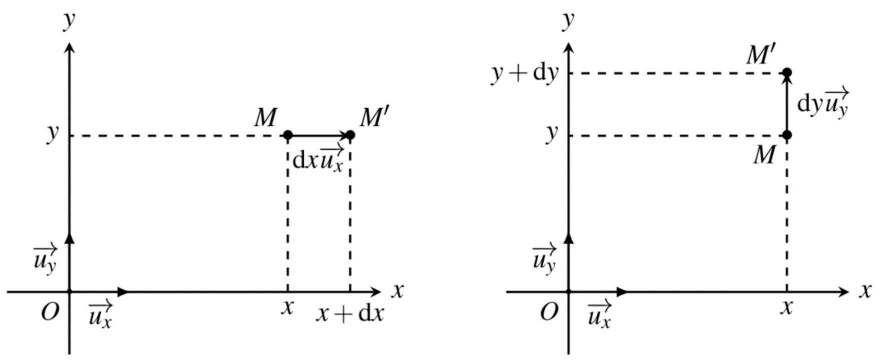


Figure 1 : Déplacements élémentaires indépendants

On retrouve donc, en sommant ces deux variations [1] :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}x\vec{u}_x + \mathrm{d}y\vec{u}_y$$

Le vecteur vitesse est égal au rapport du vecteur déplacement élémentaire à la durée élémentaire dt de ce déplacement :

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{u}_x + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{u}_y$$

On peut ensuite généraliser ce raisonnement **dans l'espace** et construire le point M' issu du déplacement élémentaire de M :

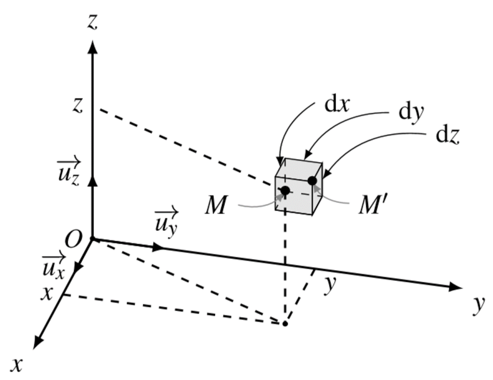


Figure 2 : Déplacement élémentaire en coordonnées cartésiennes

$$\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}x\vec{u}_x + \mathrm{d}y\vec{u}_y + \mathrm{d}z\vec{u}_z = \overrightarrow{MM'}}$$

1. Cette somme est autorisée par l'indépendance des coordonnées x et y et l'orthonormalité de la base (cf cours de Maths pour une une preuve).

2 Coordonnées cylindriques

Raisonnons en **coordonnées polaires** :

Lorsque r varie de $\mathrm{d}r$ à θ fixé, le déplacement a lieu selon le vecteur $\vec{u}_r$ et vaut $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\vec{u}_r$.
Lorsque θ varie de $\mathrm{d}\theta$ à r fixé, le déplacement a lieu selon le vecteur $\vec{u}_\theta$ et vaut $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = r\mathrm{d}\theta\vec{u}_\theta$.

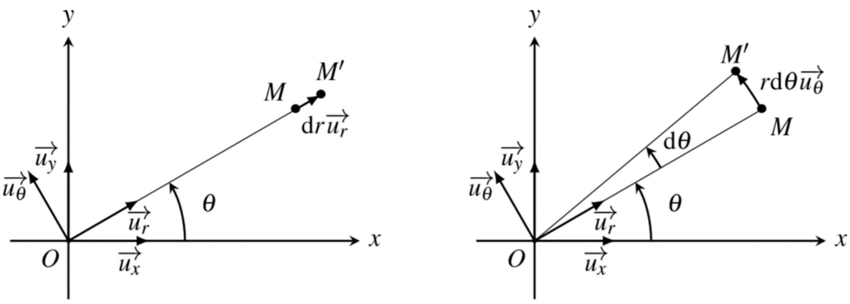


Figure 3 : Déplacements élémentaires indépendants en coordonnées polaires

On retrouve donc, en sommant ces deux variations[2] :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\vec{u}_r + r\mathrm{d}\theta\vec{u}_\theta$$

Le vecteur vitesse est égal au rapport du vecteur déplacement élémentaire à la durée élémentaire $\mathrm{d}t$ de ce déplacement :

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{u}_r + \frac{r\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{u}_\theta$$

On peut ensuite généraliser ce raisonnement en **coordonnées cylindriques** et construire le point M' issu du déplacement élémentaire de M :

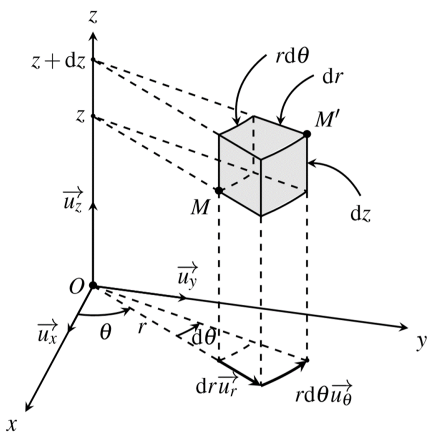


Figure 4 : Déplacement élémentaire en coordonnées cylindriques

$$\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\vec{u}_r + r\mathrm{d}\theta\vec{u}_\theta + \mathrm{d}z\vec{u}_z = \overrightarrow{MM'}}$$

2. Même autorisation que plus haut.

3 Coordonnées sphériques

En coordonnées sphériques, le déplacement élémentaire est un peu plus compliqué à obtenir :

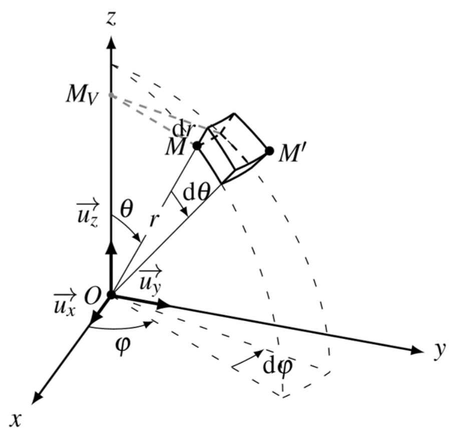


FIGURE 5 : Déplacement élémentaire en coordonnées sphériques

On retiendra seulement l'expression sans chercher à la démontrer :

$$\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\vec{u}_r + r\mathrm{d}\theta\vec{u}_\theta + r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\vec{u}_\varphi = \overrightarrow{MM'}}$$

III - Exemples de mouvements

A Définitions

DÉFINITION

Trajectoire : Ensemble des points $M(t)$ occupés par le point matériel au cours du temps.
Elle peut être : Rectiligne, Circulaire, Parabolique, Spiralaire, Quelconque...

Remarque :

Le mouvement est dit :

- uniforme si la norme de la vitesse est constante $||\vec{v}[[=$ cste
- accéléré si la norme de la vitesse augmente
- uniforme si la norme de la vitesse diminue

Remarque :

Degrés de liberté d'un mouvement :

Remarque :

B Étude d'un mouvement à vecteur accélération constant

1 Cas d'un vecteur accélération nul

À RETENIR

2 Cas d'un vecteur accélération constant non nul

Remarque :

Degrés de liberté :

C Mouvement circulaire

1 Cas général

VECTEURS CINÉMATIQUES POUR DÉCRIRE UN MOUVEMENT CIRCULAIRE

Degrés de liberté :

2 Cas particulier d'un mouvement circulaire uniforme

PROPRIÉTÉS D'UN MCU

Remarque importante :

D Généralisation à une trajectoire quelconque : le repère de Frénet

DÉFINITION

Repère de Frénet : Considérons un point M se déplaçant le long d'une trajectoire plane quelconque :

VECTEURS CINÉMATIQUES DANS LE REPÈRE DE FRÉNET

Remarque :

Composantes de l'accélération