

Concours blanc Physique

Exceptionnellement, je n'ai pas rédigé le corrigé du DS. Manque de temps et attrait du confort de disposer pour une fois d'une correction toute prête proposée par un.e collègue d'une autre CPGE.

PARTIE I - Trajectoires des plombs d'une cartouche**Equation du mouvement**

- 1) Le Principe Fondamental de la Dynamique (PDF) appliqué au plomb donne :

$$\vec{F}_D + m\vec{g} = m\vec{a}_G = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

soit l'équation différentielle demandée :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\rho_a S c_D}{2m} \vec{v} \vec{v} = \vec{g}$$

Premier modèle : trajectoire gravitaire

- 2) La force de frottement initiale est négligeable devant la force de pesanteur ssi :

$$\frac{\rho_a S c_D}{2m} v_0^2 \ll g \Leftrightarrow v_0 \ll \sqrt{\frac{2mg}{\rho_a \pi R^2 c_D}}$$

- 3) La force de frottement est négligeable devant la force de pesanteur donc le PFD devient :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g}$$

qui, projeté sur OX et OZ, donne :

$$\begin{cases} m\ddot{X} = 0 \\ m\ddot{Z} = -mg \end{cases}$$

- 4) On intègre les équations précédentes une première fois :

$$\begin{cases} \dot{X} = v_0 \cos(\theta_0) \\ \dot{Z} = -gt + v_0 \sin(\theta_0) \end{cases}$$

Puis une seconde fois :

$$\begin{cases} X = v_0 \cos(\theta_0) t \\ Z = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin(\theta_0) t \end{cases}$$

- 5) La trajectoire est une
- parabole
- d'équation :

$$Z = -\frac{1}{2} g \left(\frac{X}{v_0 \cos(\theta_0)} \right)^2 + X \tan(\theta_0)$$

- 6) La portée du tir est la valeur
- $X_M \neq 0$
- de
- X
- telle que
- $Z = 0$
- :

$$Z = 0 \text{ et } X \neq 0 \Leftrightarrow X = \frac{2v_0^2}{g} \cos^2(\theta_0) \tan(\theta_0) = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta_0) = X_M$$

La hauteur maximale du tir correspond à l'altitude Z quand $\dot{Z} = 0$ soit pour $t_1 = \frac{v_0 \sin(\theta_0)}{g}$, donc

$$H_M = Z(t_1) = -\frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin(\theta_0)}{g} \right)^2 + v_0 \sin(\theta_0) \frac{v_0 \sin(\theta_0)}{g}$$

$$H_M = \frac{v_0^2 \sin^2(\theta_0)}{2g}$$

- 7) L'angle initial pour lequel la portée est maximale est la valeur de
- θ_0
- pour laquelle
- $\frac{dX_M}{d\theta_0} = 0$
- ; soit :

$$\frac{dX_M}{d\theta_0} = 2 \frac{v_0^2}{g} \cos(2\theta_0) = 0 \Leftrightarrow \cos(2\theta_0) = 0 \Leftrightarrow 2\theta_0 = \frac{\pi}{2} [\pi]$$

Et comme $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$, la solution est : $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$.

- 8) Une régression arithmétique pour les
- diamètres**
- de 0,25 mm par numéro en partant de
- $R_1 = 2$
- mm donne :
- $R_k = 2 - (k-1) \times 0,125$
- (en mm)

On complète le tableau en prenant $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$; $v_0 = 380$ m/s ; $m = \rho \times \frac{4}{3} \pi R^3$

$$\text{et } v_\infty = \sqrt{\frac{2mg}{\rho_a \pi R^2 c_D}} = \sqrt{\frac{8g\rho}{3\rho_a c_D}} R.$$

n°	1	5	10
Rayon R (mm)	2,0	1,5	0,875
Masse m (g)	0,38	0,16	0,031
Portée X_M (km)	15	15	15
Hauteur H_M (km)	3,7	3,7	3,7
v_∞ (m/s)	33	29	22

- 9) Les plombs n°5 ont un diamètre de 3 mm, donc d'après le document 1, la distance maximale possible avec l'angle de tir le plus favorable est de 300 m, alors qu'avec notre modèle on obtient (pour $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$) une portée maximale de 15 km, soit **50 fois plus** !

L'autre facteur qui montre qu'il faut abandonner ce modèle est la valeur de v_∞ qui est de l'ordre de $\frac{v_0}{10}$ et donc $v_0 \ll v_\infty$ **n'est pas vérifié** !

Deuxième modèle : trajectoire de Tartaglia

- 10) Comme $v_0 \gg v_\infty$, on a $\frac{\rho_a S c_D}{2} v_0^2 \gg mg$: **la force de pesanteur est négligeable devant la force de traînée.**

- 11) Le PDF donne donc : $\vec{F}_D = m \frac{d\vec{v}}{dt}$
soit : $-\frac{\rho_a S c_D}{2} v \vec{v} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$

Dans cette première phase, \vec{v} et $\frac{d\vec{v}}{dt}$ sont tous deux colinéaires à X' et $v = \frac{dX'}{dt}$, donc :

$$-\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\rho_a S c_D}{2m} v \vec{v} = \frac{g}{v_\infty^2} v \vec{v} = \frac{g}{v_\infty^2} \frac{dX'}{dt} \vec{v}$$

On pose : $\frac{g}{v_\infty^2} = \frac{1}{D}$ (pour que $D > 0$ comme dans le tableau 2, Q14)

Alors : $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dX'} \frac{dX'}{dt} = -\frac{1}{D} \frac{dX'}{dt} \vec{v} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dX'} = -\frac{1}{D} \vec{v}$

- 12) En faisant une analyse dimensionnelle de cette dernière relation, on détermine immédiatement que **D a la dimension d'une longueur.**

- 13) On projette la relation Q11 sur OX' et on l'intègre :

$$\frac{dv}{dX'} = -\frac{1}{D} v \Leftrightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{dX'}{D} \Rightarrow \ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = -\frac{X'}{D} \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_0 e^{-\frac{X'}{D}}$$

D est la distance pour laquelle la vitesse est divisée par e.

- 14) On complète le tableau avec : $d = D \ln\left(\frac{v_0}{10 v_\infty}\right)$;

$$v_u = v_0 e^{-\frac{X_1}{D}} \text{ avec } X_1 = 40 \text{ m et } E_c = \frac{1}{2} m v_u^2.$$

n°	1	5	10
D (m)	110	86	50
v_0/v_∞	11	13	17
d (m)	15,5	23	27
v_u (m/s)	270	240	170
E_c (J)	13,5	4,6	0,45

Rem : Attention aux valeurs de d de l'énoncé qui sont fausses !

- 15) La portée utile d'un tir pourrait être définie par **la distance maximale à laquelle on peut envoyer le plomb dans la direction X' .**

- 16) On suppose qu'il faut comparer les énergies cinétiques qu'on nous a fait calculer, soit celles à 40 m :

$$\frac{E_{c5}}{E_{c1}} = 0,34 \sim \frac{1}{3} \text{ donc il faut } 3 \times 2 = \mathbf{6 \text{ plombs n}^\circ 5}$$

$$\frac{E_{c10}}{E_{c1}} = 0,033 \sim \frac{1}{30} \text{ donc il faut } 30 \times 2 = \mathbf{60 \text{ plombs n}^\circ 10}$$

Comme la première phase s'arrête quand la vitesse n'est plus très grande devant v_∞ , soit environ pour $v \approx 10 \times v_\infty$, donc pour $X'=d$, on peut dire alors que **la portée utile est** :

$$d = D \ln\left(\frac{v_0}{10 v_\infty}\right)$$

- 17) Dans le document 1, on parle d'une portée utile de 35 à 40 m tout au plus, alors qu'avec notre modèle on obtient une portée utile de $d=15$ à 30 m environ (valeurs rectifiées), **ce qui est cohérent.**

Si les billes sont en fer doux, la masse volumique ρ est plus faible, donc pour le même rayon R, m et v_∞ seraient plus petits, donc D aussi, et v_u et

E_c aussi. L'augmentation de R permet de compenser cet effet afin de conserver la même énergie cinétique E_c .

Si les plombs s'agglutinent, la masse et le diamètre augmentent, donc la portée utile aussi : **La distance de sécurité à respecter n'est pas celle indiquée si la grenaille s'agglutine, elle est en réalité plus grande : danger !**

Troisième et dernière phase : mouvement rectiligne descendant

18) Cette phase correspond à un **mouvement de chute avec résistance de l'air** puisqu'on tient compte de la force de frottement de l'air (dans la chute libre, la seule force qui s'exerce sur l'objet est son poids).

19) Le PFD donne : $\vec{F}_D + m\vec{g} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$
On pose $\vec{v} = -v\vec{k}$ puisque le mouvement est vers le bas.

$$+ \frac{\rho_a S c_D}{2} v^2 \vec{k} - mg\vec{k} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = -m \frac{dv}{dt} \vec{k}$$

$$\frac{\rho_a S c_D}{2} v^2 - mg = -m \frac{dv}{dt}$$

d'où l'équation différentielle : $\frac{dv}{dt} + \frac{\rho_a S c_D}{2m} v^2 = g$

Quand la vitesse limite est atteinte, $\frac{dv}{dt} = 0$, et donc :

$$\frac{\rho_a S c_D}{2m} v_\infty^2 = g \Rightarrow \boxed{\vec{v}_\infty = -\sqrt{\frac{2mg}{\rho_a S c_D}} \vec{k}}$$

On parle de « mur aérodynamique » car la **vitesse de cette phase est limitée par la force aérodynamique** : force de frottement fluide.

Deuxième phase : la phase intermédiaire

20) On suppose que la vitesse a suffisamment diminué pour qu'elle soit **négligeable devant v_∞** , alors la première modélisation s'applique et on est bien **dans la phase gravitaire**.

21) Pour $\theta_0 = 16^\circ$ on obtient :

$$\begin{cases} X_M = 264 \text{ m} & \text{pour le plomb n}^\circ 1 \\ X_M = 217 \text{ m} & \text{pour le plomb n}^\circ 5 \\ X_M = 139 \text{ m} & \text{pour le plomb n}^\circ 10 \end{cases}$$

A comparer avec la formule : diamètre du plomb $\times 100$ (doc 1) :

$$\begin{cases} X_M = 400 \text{ m} & \text{pour le plomb n}^\circ 1 \\ X_M = 300 \text{ m} & \text{pour le plomb n}^\circ 5 \\ X_M = 175 \text{ m} & \text{pour le plomb n}^\circ 10 \end{cases}$$

Le document 1 donne des valeurs supérieures à celles du calcul théorique, en particulier pour les grands diamètres, mais c'est le bon ordre de grandeur.

Cependant, le calcul théorique est basé sur une approximation et est calculé pour un angle (16°) qui n'est pas forcément celui donnant la portée maximale.

Quant à la formule du document, elle est qualifiée de « grossière » et pour des raisons de sécurité, il vaut mieux qu'elle donne une valeur supérieure à la valeur réelle.

22) En utilisant les valeurs obtenues dans le tableau 2, on calcule $\log\left(\frac{v_0}{v_\infty}\right)$ pour les 3 numéros de plomb considérés et on relève la valeur correspondante de θ_{\max} . On trouve :

n°	$\log\left(\frac{v_0}{v_\infty}\right)$	θ_{\max}
1	2,0	18°
5	2,2	17°
10	2,5	16°

23) En prolongeant éventuellement les courbes, on lit la valeur de l'abscisse du point tel que $Z=0$; c'est la portée maximale X_M :

$$\begin{cases} X_M = 345 \text{ m} & \text{pour le plomb n}^\circ 1 \\ X_M = 265 \text{ m} & \text{pour le plomb n}^\circ 5 \\ X_M = 170 \text{ m} & \text{pour le plomb n}^\circ 10 \end{cases}$$

Ces valeurs sont plus proches de celles du document 1 qu'à la question Q21, toujours légèrement inférieure comme il se doit (cf. fin Q21).

Une balance.

CCP PC1 2013.

1) Le référentiel terrestre n'est pas galiléen car il est en rotation par rapport au référentiel géocentrique, lui-même en translation dans le référentiel de Copernic, qu'on considère galiléen. Le mouvement du référentiel géocentrique dans le référentiel de Copernic a une période de 1 an = 365j donc sur 1 jour, on peut considérer la translation comme rectiligne uniforme et pour des durées inférieures à 1 journée, le référentiel géocentrique est galiléen.

La rotation du référentiel terrestre dans le référentiel géocentrique a une période d'environ 24h; donc sur une dizaine de minutes, le référentiel terrestre a suffisamment peu tourné pour qu'on le considère galiléen, comme le référentiel géocentrique.

Ainsi, pour une expérience qui ne dure que quelques minutes, on peut considérer le référentiel terrestre comme galiléen.

Les mouvements de la balance sont dans ce cas.

2.1) et 2.2) On va répondre un peu dans le désordre par rapport aux questions. En effet, pour pouvoir utiliser les coordonnées polaires, il faut d'abord montrer que le mouvement est plan.

Je commence donc par 2.2).

J'applique le théorème du moment cinétique (TMC) dans le référentiel terrestre galiléen à l'enfant sur sa balance.

Bilan des actions : \rightarrow le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ appliqué en Π .
 \rightarrow la tension du fil $\vec{T} = -T\vec{e}_2$ appliqué en Π .

Le TMC s'écrit : $\frac{d\vec{T}_0}{dt} = \vec{O}\vec{N}_1\vec{P} + \vec{O}\vec{N}_1\vec{T}$ avec O fixe

$$\text{Ainsi } \frac{d(\vec{O}\vec{N}_1 m \vec{v})}{dt} = \vec{O}\vec{N}_1\vec{P} + \vec{O}$$

Or, à $t=0$, $\vec{O}\vec{N}$ et \vec{v} sont dans le plan de la feuille donc $\vec{T}_0(t)$ est perpendiculaire à la feuille.

et $\vec{O}\vec{N}$ et \vec{P} sont également dans le plan de la feuille donc $\frac{d\vec{T}_0}{dt}$ est perpendiculaire à la feuille.

Ainsi \vec{T}_0 reste perpendiculaire à la feuille à $t=0+dt$, ce qui signifie que $\vec{O}\vec{N}$ et \vec{v} restent dans le plan de la feuille de même que \vec{P} . Et ainsi, de proche en proche (cf méthode d'Euler), \vec{T}_0 reste perpendiculaire à la feuille (suivant \vec{u}_z) et le mouvement est plan.

2.1.1) Le bilan des actions reste le même.

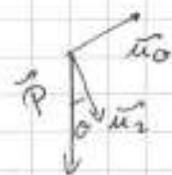
On applique le principe fondamental de la dynamique (PFD) à l'enfant ou sa balançoire dans le référentiel terrestre R_T galiléen, en utilisant les coordonnées cylindriques.

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$$

$$\text{or } \vec{O}\vec{N} = \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ d'où } \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ l\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } r = \text{cte.}$$

$$\text{on dérive une deuxième fois : } \vec{a} = \begin{pmatrix} -l\dot{\theta}^2 \\ l\ddot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{D'autre part } \vec{P} = mg \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$



On projette le PFD sur \vec{u}_0 :

$$\boxed{m l \ddot{\theta} = -m g \sin\theta + 0}$$

2.1.2) On va utiliser le théorème de l'énergie mécanique (TEM) qui est la même chose que le théorème de l'énergie cinétique en remplaçant le travail des forces conservatives (le poids \vec{P} ici) par l'opposé de la variation de leur énergie potentielle.

C'est-à-dire
$$E_m(t) - E_m(0) = W_{0 \rightarrow t}(\vec{T})$$

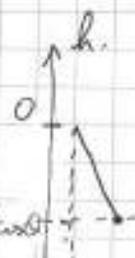
Rmq. le système {enfant} et le référentiel R_T galiléen restent les mêmes

On
$$E_m(t) = E_p(t) + E_c(t)$$

avec
$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$$

et
$$E_p = m g h = -m g l \cos \theta$$

 (h étant orienté vers le haut, d'origine 0).



D'où
$$E_m = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - m g l \cos \theta.$$

D'autre part \vec{T} ne travaille pas car elle est perpendiculaire au déplacement de π .

Ainsi E_m est constante, c'est-à-dire $\frac{dE_m}{dt} = 0.$

ou encore
$$\frac{1}{2} m l^2 (2 \dot{\theta} \ddot{\theta}) - m g l (-\dot{\theta} \sin \theta) = 0$$

$$l \ddot{\theta} = -g \sin \theta.$$
 On retrouve la même équation.

2.1.3) On va terminer d'appliquer le TTC du 2.2)

$$\vec{T}_0 = \vec{ON} \wedge m \vec{v} = \begin{vmatrix} l & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ m l \dot{\theta} \end{vmatrix} = m l^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$$

$$\vec{M}_0(\vec{P}) = \vec{ON} \wedge \vec{P} = \begin{vmatrix} l & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} m g \cos \theta \\ -m g \sin \theta \end{vmatrix} = -m l g \sin \theta \vec{e}_z$$

d'où $\frac{d\vec{T}_0}{dt} = \vec{M}_0(\vec{P}) + \vec{0}$ dérivé après projection sur \vec{e}_z :

$$m l^2 \ddot{\theta} = -m g l \sin \theta$$
 soit, encore,
$$l \ddot{\theta} = -g \sin \theta$$

2.3] Il faut que l'équation du mouvement soit celle d'un oscillateur harmonique: $\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \theta$, donc tout d'abord qu'on puisse assimiler $\sin \theta$ à θ , ce qui impose que les angles soient petits et de travailler en rad.

alors $\sin \theta = \theta$. et l'équation du mouvement devient

$$\boxed{\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \theta} \quad \text{On identifie} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}}$$

A.N. On suppose que θ_0 est petit.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{10}{2,5}} = \sqrt{4} = 2 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\text{d'où} \quad \boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \approx 3 \text{ s.}}$$

$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)$ est la solution du mouvement avec $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$.

d'où $v = l\dot{\theta} = -l\omega_0 \theta_0 \sin \omega_0 t$.

On trouve $\boxed{v_{\max} = l\omega_0 \theta_0}$

$$\text{A.N.} \quad v_{\max} = 2,5 \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{180} \cdot 30.$$

$$\boxed{v_{\max} = \frac{5 \cdot \pi}{6} \approx 2,5 \text{ m.s}^{-1}}$$

3.1] On reprend l'expression du théorème de l'énergie cinétique:

$$\frac{1}{2} m l^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - m g l \cos \theta = \frac{1}{2} m l^2 \underset{v(0)=0}{\theta^2} - m g l \cos \theta_0.$$

$$\text{d'où} \quad \boxed{\frac{d\theta}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2g(\cos \theta - \cos \theta_0)}{l}}}$$

or $T = \int dt$, il suffit donc de séparer les variables et d'intégrer.

$$dt = \pm \sqrt{\frac{l}{2g}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

Mais il faut bien choisir le signe.

Comme θ oscille, il est plus simple de travailler sur un quart de période $\frac{T}{4}$, θ allant alors de θ_0 à 0.

Dans ce cas θ diminue pendant que t augmente, il faut garder le signe $-$.

$$\int_0^{T/4} dt = \boxed{\frac{T}{4} = -\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_{\theta_0}^0 \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}}$$

si θ est petit $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$; $\cos\theta_0 = 1 - \frac{\theta_0^2}{2}$

$$\text{d'où } \frac{T}{4} = -\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_{\theta_0}^0 \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta_0^2}{2}}} = \sqrt{\frac{l}{2g}} \frac{\sqrt{2}}{\theta_0} \int_{\theta_0}^0 \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^2}}$$

On fait un changement de variable $X = \frac{\theta}{\theta_0}$

$$\frac{T}{4} = -\sqrt{\frac{l}{g}} \int_1^0 \frac{dX}{\sqrt{1-X^2}} = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^1 \frac{dX}{\sqrt{1-X^2}} = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^1 d(\arcsin X).$$

$$= \sqrt{\frac{l}{g}} (\arcsin 1 - \arcsin 0)$$

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{\pi}{2}$$

$$\text{d'où } \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

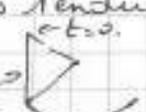
On retrouve le résultat du 2.3.

On remarque sur la courbe que notre évaluation de T_0 est correcte. Ensuite, que la période augmente avec θ_0 .

Pour $\theta_0 = 30^\circ = \frac{\pi}{6} \approx 0,5$ rad, la période est peu différente de T_0 .

On peut considérer que θ_0 est un petit angle. (à 10% près).

Enfin, c'est une courbe théorique et non expérimentale car pour $\theta_0 > \frac{\pi}{2}$

(environ 1,5), la corde de la balancine n'est pas tendue initialement et on n'observe pas de belles oscillations: 
 c'est-à-dire.
 chateaubriand.

3.2] L'équation de en θ s'écrit $\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta$, c'est-à-dire dans ce cas $\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \left(\theta - \frac{\theta^3}{6} \right)$

3.3.1] $\ddot{\theta} = -\omega^2 \theta_0 \cos(\omega t) - 3\omega^2 \varepsilon \theta_0 \cos(3\omega t)$

$$\theta^3 = \theta_0^3 \left(\cos^3 \omega t + 3\varepsilon \cos^2(\omega t) \cos(3\omega t) + 3\varepsilon^2 \cos(\omega t) \cos^2(3\omega t) + \varepsilon^3 \cos^3(3\omega t) \right)$$

$$\approx \theta_0^3 \left(\cos^3 \omega t + 3\varepsilon \cos^2(\omega t) \cos(3\omega t) \right) \quad \text{au premier ordre en } \varepsilon.$$

On reporte :

$$-\omega^2 \theta_0 \cos \omega t - 3\omega^2 \varepsilon \theta_0 \cos(3\omega t) = -\frac{g}{l} \left[\theta_0 \cos(\omega t) + \varepsilon \theta_0 \cos(3\omega t) - \theta_0^3 \left(\cos^3(\omega t) + 3\varepsilon \cos^2(\omega t) \cos(3\omega t) \right) \right]$$

Le terme en $\frac{\theta_0^3}{6}$ est un terme de correction (perturbatif) donc infiniment petit. On ne garde donc pas le terme en $\varepsilon \theta_0^3$, qui est infiniment petit à cause de θ_0^3 et de ε , donc 2 fois.

On regroupe les termes en $\cos \omega t$. ($\cos^3 \omega t = \frac{3\cos \omega t + \cos 3\omega t}{4}$)

$$-\omega^2 \theta_0 \cos \omega t = -\frac{g}{l} \theta_0 \cos \omega t + \frac{g}{l} \theta_0^2 \frac{3\cos \omega t}{4}$$

$$\text{d'où } \omega^2 = \frac{g}{l} \left(1 - \frac{3}{4} \theta_0^2 \right)$$

$$\text{c'est-à-dire } \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{3}{4} \theta_0^2}$$

(ω diminue donc T augmente, c'est compatible avec la courbe numérique)

Rmq: Ce n'est pas du tout le résultat attendu!

On regroupe les termes en $\cos(3\omega t)$

$$-3\omega^2 \varepsilon \theta_0 \cos(3\omega t) = -\frac{g}{l} \varepsilon \theta_0 \cos(3\omega t) + \frac{g}{l} \theta_0^2 \frac{\cos(3\omega t)}{4}$$

$$\text{On utilise } \omega^2: \quad -3\left(\frac{g}{l}\right) \left(1 - \frac{3}{4} \theta_0^2\right) \varepsilon = -\frac{g}{l} \varepsilon + \frac{g}{l} \theta_0^2 \frac{1}{4}$$

$$\text{soit } \left(-3 + \frac{27}{4} \theta_0^2 + 1\right) \varepsilon = \frac{\theta_0^2}{4}$$

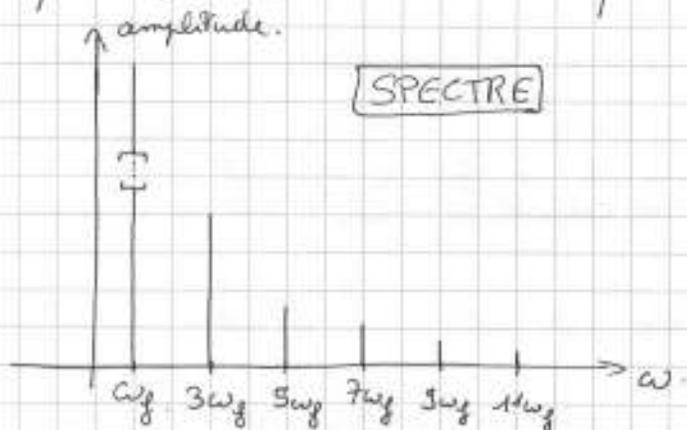
$$(-32 + 27\theta_0^2)E = \theta_0^2$$

d'où
$$E = \frac{\theta_0^2}{-32 + 27\theta_0^2}$$

3.3.2] J'ai déjà répondu en remarque: ω diminue donc
 [T augmente par rapport à T_0 (mouvement harmonique)]
 c'est compatible avec la courbe numérique

3.3.3] Les pulsations présentes sont ω (fondamental) et
 [3 ω (1^{re} harmonique)]
 ↑ note ω_g

3.3.4] Le DL de $\sin\theta$ ne comportent que des puissances
 impaires, on ne va trouver que les harmoniques impairs:



Les amplitudes sont a priori de plus en plus faibles.

4.1] ~~On revient à des petits angles (pas précisé dans~~

$C \frac{d\theta}{dt}$ est un moment donc il s'exprime en $N.m = kg.m^2.s^{-2}$

or $\frac{d\theta}{dt}$ s'exprime en s^{-1} donc C en $kg.m^2.s^{-1}$

La dimension de C est $\Pi.L^2.T^{-1}$

4.2] Le TNC devient: $m.l^2.\ddot{\theta} = -mgl \sin\theta - C\dot{\theta}$
 par projection sur \vec{u}_θ

4.3] On considère des angles petits donc $m.l^2.\ddot{\theta} = -mgl\theta - C\dot{\theta}$

Réolvons: $m l \ddot{\theta} + C \dot{\theta} + m g l \theta = 0$.

L'équation caractéristique est $m l^2 r^2 + C r + m g l = 0$,
de discriminant $\Delta = C^2 - 4 m^2 g l^3$.

Si $\Delta > 0$, le régime est apériodique, il n'y a pas d'oscillations.

Si $\Delta = 0$, le régime est critique, il n'y a pas d'oscillations.

Il faut que $\Delta < 0$ pour que le régime soit pseudo-périodique,
soit $C < 2 m l \sqrt{g l}$.

Dans ce cas $r = \frac{-C \pm j \sqrt{-\Delta}}{2 m l^2} = -\frac{C}{2 m l^2} \pm j \sqrt{\frac{g}{l} - \left(\frac{C}{2 m l^2}\right)^2}$

La solution est $\theta = A \cos(\omega_0 t + \varphi) e^{-\frac{C}{2 m l^2} t}$ arrimilé à $\sqrt{\frac{g}{l}} = \omega_0$

après 20 oscillations $t = 20 \frac{2\pi}{\omega_0}$.

$$e^{-\frac{C}{2 m l^2} 20 \frac{2\pi}{\omega_0}} = \frac{1}{2}$$

$$C = \ln 2 \frac{2 m l^2}{20 \cdot 2\pi} \omega_0 \approx 1 \times \frac{20 \cdot (2,5)^2}{20 \cdot \pi} 2 \approx 5 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$$

$$C \approx 5 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$$

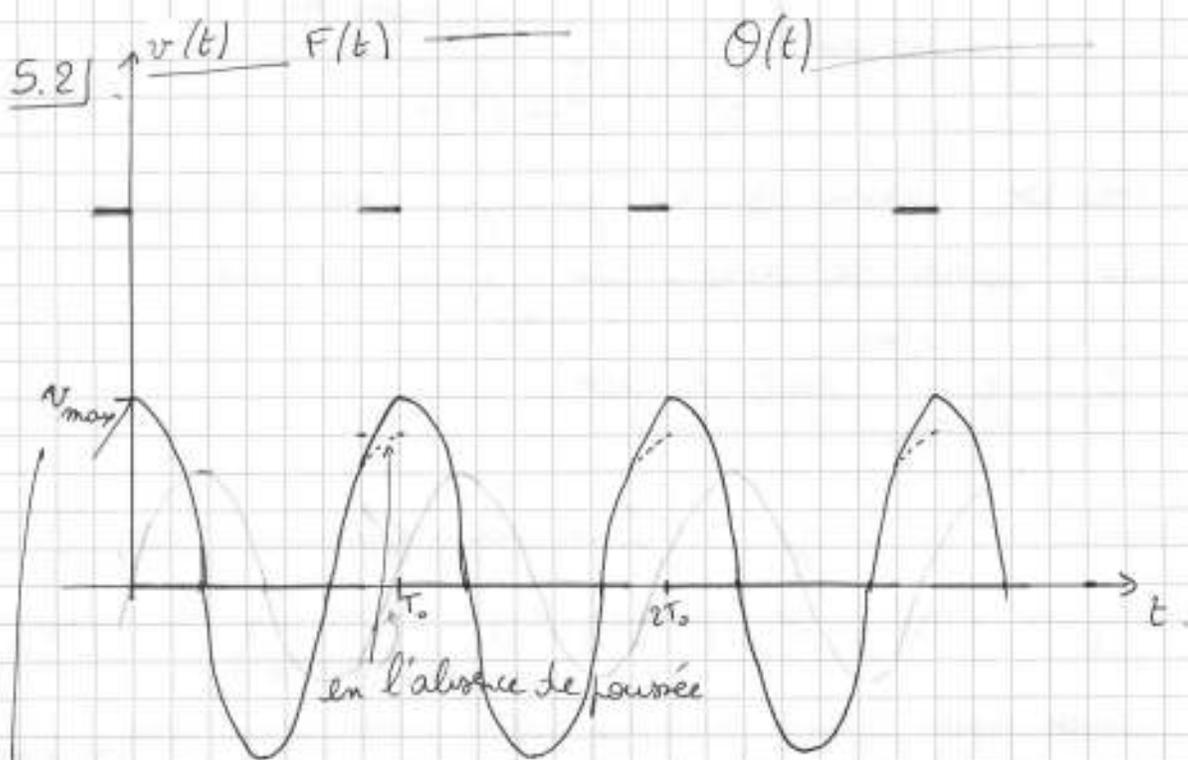
(Je ne connais pas par cœur $\ln 2$.
c'est < 1 mais plus proche de 1
que de 0).

5.) On ne connaît pas la durée de la poussée et on ne sait pas si cette durée est la même pour toutes les "portions de la poussée". On va donc raisonner sur le moment, et pas sur l'énergie, qui dépend de la durée de la poussée.

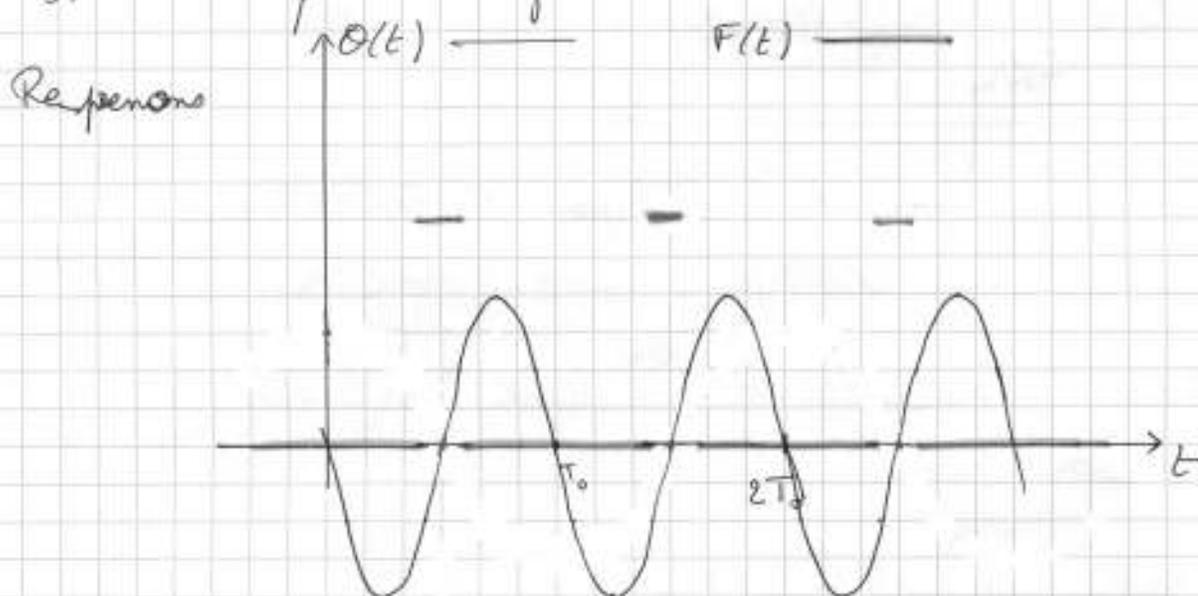
$\|\vec{M}_O(\vec{F})\| = \|\vec{O\Gamma} \wedge \vec{F}\|$ est maximal si $\vec{O\Gamma}$ est perpendiculaire à \vec{F} qui est horizontale donc si $\vec{O\Gamma}$ est verticale.

Il faut donc pousser quand l'enfant est en bas de la trajectoire et va vers l'avant! (sinon on ralentit la balançoire)

La période doit donc être un multiple de T_0 , et valoir T_0 pour que ce soit plus efficace.



Il n'est pas aisé de représenter $\theta(t)$ avec la correction due à la force. Il me vient un peu tard à l'idée que tracer le $\theta(t)$ sinusoidal peu suffire, et que l'énoncé ne s'intéresse qu'à la synchronisation!



5.3] $P = \vec{M} \cdot \vec{\Omega}$ pour un couple.

$$= -C \frac{d\theta}{dt} \frac{d\theta}{dt} = -C (\omega \theta_0 \sin \omega t)^2$$

si on considère que la force est constante et que les frottements

d'où $P_{dissipée} = + C \omega_0^2 \omega_0^2 \sin^2 \omega_0 t$

et $\langle P_{dissipée} \rangle = \frac{1}{2} C \omega_0^2 \omega_0^2$

En d'où $W_{frottements} = - \int_0^{20T_0} P_{dissipée} dt$

$= - \frac{1}{2} C \omega_0^2 \omega_0^2 20T_0$ où $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

$W_{frottements} = - 20 \pi C \omega_0^2 \omega_0$

Comme la puissance compense les frottements, $W_{frott} + W_{poussée} = 0$

$W_{poussée} = 20 \pi C \omega_0^2 \omega_0$

A.N $W_{poussée} \approx 20 \cdot \pi \cdot 5 \cdot \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 2 \approx 200 \pi \frac{10}{36} = \frac{6 \times 100 \times 10}{6 \times 6}$

$W_{poussée} \approx 2 \cdot 10^2 \text{ J}$

6.1.1) On considère comme système { l'enfant + la planche de la balançoire + la partie basse de la corde de la balançoire }



Le système subit les forces extérieures :

dans le référentiel tournant lié à la balançoire

→ poids : \vec{P}

→ tension du fil (de la corde) : \vec{T}

→ force d'inertie d'entraînement : $\vec{f}_{ie} = -m \vec{a}_e$

→ force d'inertie de Coriolis : $\vec{f}_{ic} = -m \vec{a}_c = -m 2 \vec{\omega} \wedge \vec{v}_n$

Or le poids est une force conservative donc $W_{A \rightarrow A}(\vec{P}) = 0$

Le point d'application P de la tension du fil est fixe dans le référentiel

tournant donc $W_{A \rightarrow A}(\vec{T}) = 0$

La force d'inertie de Coriolis est perpendiculaire au mouvement donc ne travaille pas. Il ne reste que le travail de \vec{f}_{ie} .

or $\vec{f}_{ie} = -m \left[\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{O}n) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{O}n \right] = +m \omega^2 O n \vec{u}_r - m \dot{\omega} O n \vec{u}_\theta$