

Page web du *Cahier d'entraînement*,
dernières versions



Ce cahier d'entraînement a été écrit collectivement par des professeurs en classes préparatoires scientifiques.

Coordination

Colas BARDAVID et Jimmy ROUSSEL

Équipe des participants

Stéphane BARGOT, Claire BOGGIO, Cécile BONNAND, Alexis BRÈS, Geoffroy BURGUNDER, Erwan CAPITAINE, Caroline CHEVALIER, Maxime DEFOSSEUX, Raphaëlle DELAGRANGE, Alexis DROUARD, Gaëlle DUMAS, Alexandre FAFIN, Jean-Julien FLECK, Aéla FORTUN, Florence GOUTVERG, Chahira HAJLAOUI, Mathieu HEBDING, Lucas HENRY, Didier HÉRISSON, Jean-Christophe IMBERT, Fanny JOSPITRE, Tom KRISTENSEN, Emmanuelle LAAGE, Catherine LAVAINNE, Maxence MIGUEL-BREBION, Anne-Sophie MOREAU, Louis PÉAULT, Isabelle QUINOT, Valentin QUINT, Alain ROBICHON, Caroline ROSSI-GENDRON, Nancy SAUSSAC, Anthony YIP

Le pictogramme 🕒 de l'horloge a été créé par Ralf SCHMITZER (The Noun Project).

Le pictogramme 🚧 du bulldozer a été créé par Ayub IRAWAN (The Noun Project).

La photographie de la couverture vient de TWITTER. L'illustration est utilisée à des fins pédagogiques et les droits restent réservés.

Version 1.2.0 — 17 août 2024

Mode d'emploi

Qu'est-ce que le cahier d'entraînement ?

Le *cahier d'entraînement en physique-chimie* est un outil destiné à renforcer l'acquisition de **réflexes utiles en physique et en chimie**.

Il ne se substitue en aucun cas aux TD donnés par votre professeur ; travailler avec ce cahier d'entraînement vous permettra en revanche d'aborder avec plus d'aisance les exercices de physique-chimie.

Pour donner une analogie, on pourrait dire que ce cahier d'entraînement est comparable aux **exercices de musculation** d'un athlète : ils sont nécessaires pour mieux réussir le jour J lors de la compétition, mais ils ne sont pas suffisants : un coureur de sprint fait de la musculation, mais il fait également tout un tas d'autres exercices.

Ce cahier a été conçu par une large équipe de professeurs en classes préparatoires, tous soucieux de vous apporter l'aide et les outils pour réussir.

Comment est-il organisé ?

Le cahier est organisé en *fiches d'entraînement*, chacune correspondant à un thème issu du programme de première année d'enseignement supérieur.

Les thèmes choisis sont dans l'ensemble au programme de toutes les CPGE. De rares thèmes sont spécifiques à la filière PCSI, mais les intitulés sont suffisamment clairs pour que vous puissiez identifier facilement les fiches qui vous concernent.

Chaque fiche est composée d'une suite de petits exercices, appelés *entraînements*, dont le temps de résolution estimé est indiqué par une (🕒🕒🕒🕒), deux (🕒🕒🕒), trois (🕒🕒🕒) ou quatre (🕒🕒🕒🕒) horloges.

Les exercices « bulldozer »

Certains entraînements sont accompagnés d'un pictogramme représentant un bulldozer.



Ces entraînements sont **basiques et transversaux**.

Les compétences qu'ils mettent en jeu ne sont pas forcément spécifiques au thème de la fiche et peuvent être transversales.

Ce pictogramme a été choisi car le bulldozer permet de construire les fondations, et que c'est sur des fondations solides que l'on bâtit les plus beaux édifices. Ces entraînements sont donc le gage pour vous d'acquérir un socle solide de savoir-faire.

Comment utiliser ce cahier ?

Le cahier d'entraînement ne doit pas remplacer vos TD. Il s'agit d'un outil à utiliser en complément de votre travail « normal » en physique (apprentissage du cours, recherche de TD, recherche des DM).

Un travail personnalisé.

Le cahier d'entraînement est prévu pour être **utilisé en autonomie**.

Choisissez vos entraînements en fonction des difficultés que vous rencontrez, des chapitres que vous étudiez, ou bien en fonction des conseils de votre professeur.

Ne cherchez pas à faire linéairement ce cahier : les fiches ne sont pas à faire dans l'ordre, mais en fonction des points que vous souhaitez travailler.

Un travail régulier.

Pratiquez l'entraînement à un rythme régulier : **une dizaine de minutes par jour** par exemple. Privilégiez un travail régulier sur le long terme plutôt qu'un objectif du type « faire dix fiches par jour pendant les vacances ».

Un travail efficace.

Utilisez les réponses et les corrigés de façon appropriée : il est important de chercher suffisamment par vous-même avant d'aller les regarder. Il faut vraiment **persévérer** dans votre raisonnement et vos calculs avant d'aller voir le corrigé si vous voulez que ces entraînements soient efficaces.

Une erreur ? Une remarque ?

Si jamais vous voyez une erreur d'énoncé ou de corrigé, ou bien si vous avez une remarque à faire, n'hésitez pas à écrire à l'adresse cahier.entrainement@gmail.com.

Si vous pensez avoir décelé une erreur, merci de donner aussi l'identifiant de la fiche, écrit en gris en haut à gauche de chaque fiche.

Étude des filtres

Prérequis

Trigonométrie. Nombres complexes. Association de dipôles. Signaux périodiques. Spectres de Fourier.

Nombres complexes et association de dipôles



Entraînement 5.1 — Un entraînement fondamental.



Un nombre complexe peut se mettre sous les formes suivantes :

- $\underline{Z} = a + jb$ avec a sa partie réelle et b sa partie imaginaire ;
- $\underline{Z} = Z_0 \exp(j\varphi) = Z_0(\cos(\varphi) + j\sin(\varphi))$ avec $Z_0 \geq 0$ son module et $\varphi \in \mathbb{R}$ un argument.

a) Exprimer Z_0 en fonction de a et b

b) On suppose $a \neq 0$. Exprimer $\tan(\varphi)$ en fonction de a et b

On suppose que $\varphi \in] - \pi, \pi]$.

c) Si $a \geq 0$, que peut-on dire de φ ?

(a) $\varphi \in [0, \pi]$

(c) $\varphi \in [\pi/2, \pi]$

(e) $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$

(b) $\varphi \in [0, \pi/2]$

(d) $\varphi \in] - \pi, 0]$

(f) $\varphi \in] - \pi/2, 0]$

.....

d) Si $a > 0$ et $b \leq 0$, que peut-on dire de φ ?

(a) $\varphi \in [0, \pi]$

(c) $\varphi \in [\pi/2, \pi]$

(e) $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$

(b) $\varphi \in [0, \pi/2]$

(d) $\varphi \in] - \pi, 0]$

(f) $\varphi \in] - \pi/2, 0]$

.....



Entraînement 5.2 — Impédances complexes des composants de base.



Les impédances complexes d'un résistor de résistance R , d'une bobine d'inductance L et d'un condensateur de capacité C auxquels on impose une pulsation ω sont respectivement :

$$\underline{Z}_R = R, \quad \underline{Z}_L = jL\omega \quad \text{et} \quad \underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}.$$

Calculer le module Z_0 et l'argument $\varphi \in] - \pi, \pi]$ de chacune de ces impédances.

a) Z_0 de \underline{Z}_R

c) Z_0 de \underline{Z}_L

e) Z_0 de \underline{Z}_C

b) φ de \underline{Z}_R

d) φ de \underline{Z}_L

f) φ de \underline{Z}_C

Entraînement 5.3 — Associations de dipôles.

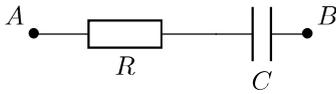


On rappelle la règle pour déterminer l'impédance complexe équivalente à celle de dipôles associés :

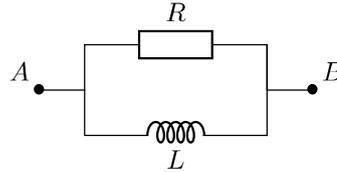
- ▶ si les dipôles sont en série : $Z_{\text{eq}} = \sum_i Z_i$
- ▶ si les dipôles sont en parallèle : $Z_{\text{eq}} = \frac{1}{\sum_i 1/Z_i}$.

À l'aide de ces règles, déterminer l'impédance complexe Z_{AB} des associations de dipôles suivants :

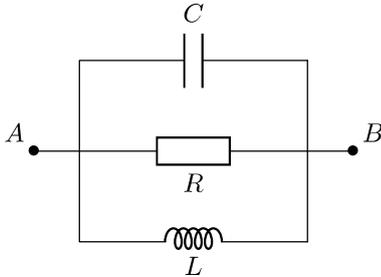
a)



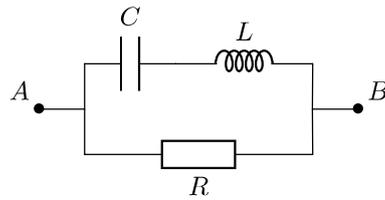
b)



c)



d)



a) $Z_{AB} = \dots\dots\dots$

b) $Z_{AB} = \dots\dots\dots$

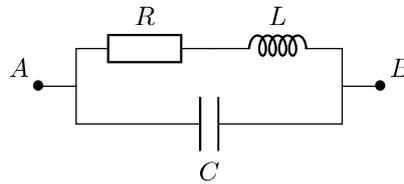
c) $Z_{AB} = \dots\dots\dots$

d) $Z_{AB} = \dots\dots\dots$

Entraînement 5.4 — À la recherche de la bonne impédance.



Un groupe d'étudiants doit trouver l'impédance Z_{AB} du dipôle AB ci-dessous :



Quelle proposition correspond à l'impédance du dipôle AB ?

Ⓐ $Z_{AB} = \frac{R + jL\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$

Ⓑ $Z_{AB} = \frac{R + jL\omega}{1 + LC\omega^2 + jRC\omega}$

Ⓒ $Z_{AB} = \frac{R + jL\omega}{1 + LC\omega^2 - jRC\omega}$

.....

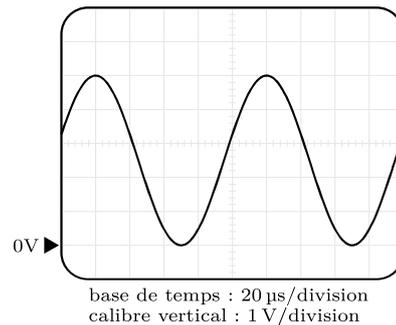
Signaux périodiques

Entraînement 5.5 — Analyse du signal provenant d'un GBF.



En TP, un élève observe à l'oscilloscope la tension délivrée par un générateur de basses fréquences (GBF).

Aider cet élève à analyser le signal de tension mesuré ci-contre en déterminant sa fréquence f_0 et son amplitude U_0 .



- a) f_0
- b) U_0

 **Entraînement 5.6 — Expression d'une tension.**



Nous disposons d'une tension sinusoïdale $u(t)$ de période $T_0 = 1$ ms, d'amplitude $U_0 = 2$ V et de phase à l'origine $\varphi = 0$ rad.

Parmi les propositions ci-dessous laquelle correspond à l'expression littérale de cette tension $u(t)$?

Ⓐ $u(t) = U_0 \cos\left(\frac{t}{T_0}\right)$

Ⓒ $u(t) = \frac{U_0}{2} \cos\left(\frac{t}{T_0}\right)$

Ⓑ $u(t) = \frac{U_0}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$

Ⓓ $u(t) = U_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$

.....



Entraînement 5.7 — Modulation d'amplitude.



On considère un signal modulé, de la forme

$$s(t) = S_0 \cos(2\pi f_p t) \times (1 + m \cos(2\pi f_0 t)) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} 0 < m < 1 \\ f_p > f_0. \end{cases}$$

a) On rappelle que

$$\begin{cases} \cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b) \\ \cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b). \end{cases}$$

En calculant $\cos(a + b) + \cos(a - b)$, trouver une formule pour $\cos(a) \cos(b)$.

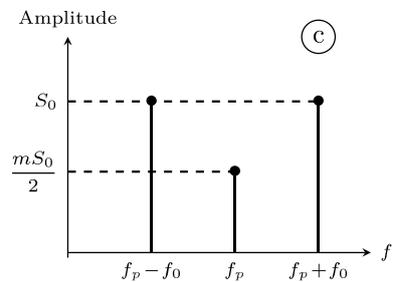
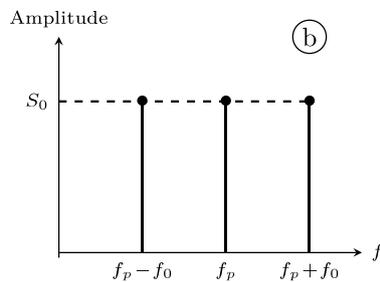
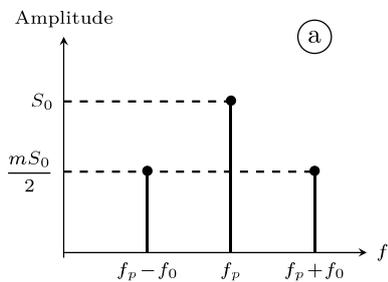
.....

b) Développer $s(t)$ et faire apparaître des sommes de cosinus.

.....

On constate que le signal $s(t)$ peut s'écrire comme la somme de trois signaux sinusoïdaux d'amplitudes et de fréquences spécifiques. On représente les différentes amplitudes des composantes de $s(t)$ en fonction de leur fréquence. Cette représentation est appelée spectre en amplitude de $s(t)$.

Le but de cet entraînement est de déterminer lequel des spectres ci-dessous ((a), (b) ou (c)) est celui du signal $s(t)$.



c) Donner l'amplitude de la composante de fréquence f_p de $s(t)$

d) Donner l'amplitude de la composante de fréquence $f_p + f_0$ de $s(t)$..

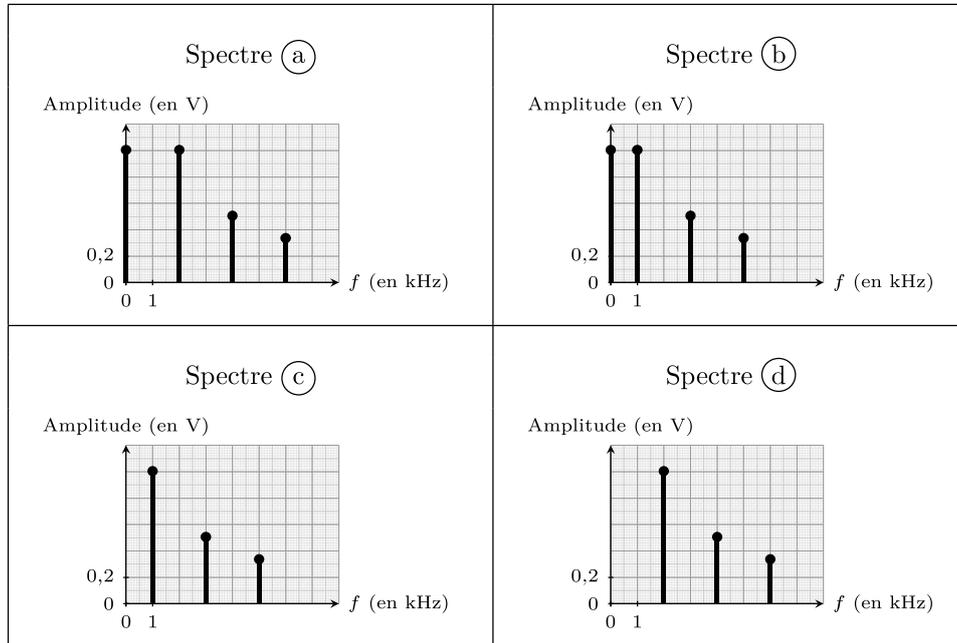
e) Donner l'amplitude de la composante de fréquence $f_p - f_0$ de $s(t)$..

f) Déterminer le spectre ((a), (b) ou (c)) correspondant à $s(t)$

Entraînement 5.8 — Pêle-mêle.



Un étudiant dispose de quatre spectres en amplitude et de quatre signaux. Malheureusement, l'ensemble est mélangé. Pouvez-vous l'aider à associer le bon signal au bon spectre ((a), (b), (c) ou (d)) ?



<p>Signal n° 1</p> $A_1 \left(\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{2} \cos(3\omega_0 t) + \frac{1}{3} \cos(5\omega_0 t) \right)$ <p>avec $A_1 = 1 \text{ V}$ et $f_0 = 1 \text{ kHz}$</p>	<p>Signal n° 2</p> $A_2 \left(1 + \sin(\omega_0 t) + \frac{1}{2} \sin(2\omega_0 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_0 t) \right)$ <p>avec $A_2 = 1 \text{ V}$ et $f_0 = 2 \text{ kHz}$</p>
<p>Signal n° 3</p> $A_3 \left(\cos((\omega_0 - \omega_1)t) + \frac{1}{2} \cos((\omega_0 + \omega_1)t) \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \cos((\omega_0 + 3\omega_1)t) \right)$ <p>avec $A_3 = 1 \text{ V}$, $f_0 = 3 \text{ kHz}$ et $f_1 = 1 \text{ kHz}$</p>	<p>Signal n° 4</p> $A_4 \left(1 + \sin(\omega_0 t) + \frac{1}{2} \sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{3} \sin(5\omega_0 t) \right)$ <p>avec $A_4 = 1 \text{ V}$ et $f_0 = 1 \text{ kHz}$</p>

- | | |
|---|---|
| <p>a) Spectre du signal n° 1 <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/></p> | <p>c) Spectre du signal n° 3 <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/></p> |
| <p>b) Spectre du signal n° 2 <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/></p> | <p>d) Spectre du signal n° 4 <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/></p> |

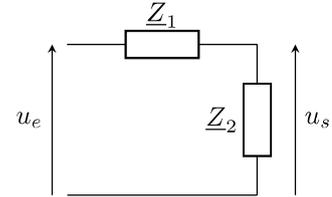
Fonctions de transfert

Entraînement 5.9 — Filtre passe-bande.



Nous disposons du filtre ci-contre, constitué de deux dipôles dont les impédances complexes sont :

$$\underline{Z}_1 = R + \frac{1}{jC\omega} \quad \text{et} \quad \underline{Z}_2 = \frac{R}{1 + jRC\omega} \quad \text{avec} \quad C = 47 \text{ nF} \quad \text{et} \quad R = 1 \text{ k}\Omega.$$



Nous souhaitons écrire la fonction de transfert du filtre $\underline{H}(j\omega) = \frac{u_s}{u_e}$ sous sa forme canonique :

$$\underline{H}(jx) = \frac{H_0}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

- a) À l'aide d'un pont diviseur de tension, exprimer $\underline{H}(j\omega)$
- b) Identifier H_0
- c) Identifier Q
- d) Identifier et calculer ω_0 .

Entraînement 5.10 — Filtre du second ordre.



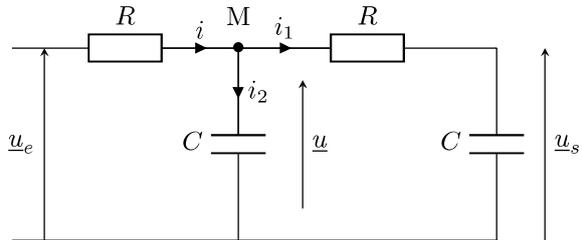
Nous disposons d'un filtre passe-bas de fonction de transfert :

$$\underline{H}(jx) = \frac{u_s}{u_e} = \frac{H_0}{1 + \frac{jx}{Q} - x^2}$$

avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$. On a $C = 10 \mu\text{F}$ et $R = 220 \Omega$.

Un étudiant obtient les trois égalités suivantes :

$$R\underline{i} = \underline{u}_e - \underline{u}, \quad R\underline{i}_1 = \underline{u} - \underline{u}_s \quad \text{et} \quad R\underline{i}_2 = jRC\omega\underline{u}.$$



- a) À l'aide de la loi des noeuds, exprimer \underline{i} en fonction de \underline{i}_1 et \underline{i}_2
- b) Utiliser la réponse précédente et les trois égalités fournies pour exprimer \underline{u}_e en fonction de \underline{u} et \underline{u}_s .
.....

L'étudiant montre grâce à un pont diviseur de tension que $\underline{u} = (1 + jRC\omega)\underline{u}_s$.

- c) En déduire la fonction de transfert simplifiée $\underline{H}(j\omega)$

En comparant la réponse précédente à la forme canonique de $\underline{H}(j\omega)$ donnée, identifier

- d) H_0
- e) ω_0
- f) Q

De la fonction de transfert au diagramme de Bode

Entraînement 5.11 — Calcul de gain en décibel.



On considère les fonctions de transfert suivantes : $\underline{H}_1 = 3,0$ et $\underline{H}_2 = j\frac{\omega}{\omega_0}$ et $\underline{H}_3 = 1 + j\frac{\omega}{\omega_1}$.

Le gain en décibel G_{dB} d'un filtre se détermine à partir de la relation :

$$G_{dB} = 20 \log (|\underline{H}|).$$

Déterminer le gain en décibel associé aux différentes fonctions de transfert ou combinaisons de fonctions de transfert ci-dessous.

- | | | | |
|----------------------------|----------------------|--|----------------------|
| a) \underline{H}_1 | <input type="text"/> | d) $\underline{H}_1 - \underline{H}_2$ | <input type="text"/> |
| b) \underline{H}_2 | <input type="text"/> | e) $\frac{\underline{H}_2}{\underline{H}_3}$ | <input type="text"/> |
| c) \underline{H}_3 | <input type="text"/> | f) $\underline{H}_2 \times \underline{H}_3$ | <input type="text"/> |

Entraînement 5.12 — Calcul de phase.



On reprend les mêmes fonctions de transfert que précédemment : $\underline{H}_1 = 3,0$ et $\underline{H}_2 = j\frac{\omega}{\omega_0}$ et $\underline{H}_3 = 1 + j\frac{\omega}{\omega_1}$.

Le déphasage φ introduit par un filtre entre les signaux d'entrée et de sortie se détermine à partir de la relation :

$$\varphi = \arg(\underline{H}) = \arctan\left(\frac{\text{Im}(\underline{H})}{\text{Re}(\underline{H})}\right).$$

Déterminer le déphasage associé aux différentes fonctions de transfert ou combinaisons de fonctions de transfert ci-dessous.

- | | | | |
|----------------------------|----------------------|--|----------------------|
| a) \underline{H}_1 | <input type="text"/> | d) $\underline{H}_1 - \underline{H}_2$ | <input type="text"/> |
| b) \underline{H}_2 | <input type="text"/> | e) $\frac{\underline{H}_2}{\underline{H}_3}$ | <input type="text"/> |
| c) \underline{H}_3 | <input type="text"/> | f) $\underline{H}_2 \times \underline{H}_3$ | <input type="text"/> |

Entraînement 5.13 — Diagramme de Bode en phase.



On utilise un filtre passe-haut de fonction de transfert $\underline{H}(jx) = \frac{jx}{1 + jx}$ avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$.

Déterminer la valeur du déphasage $\varphi(x) = \arg(\underline{H}(jx))$ du filtre pour des signaux tels que :

- | | |
|--|----------------------|
| a) $\omega = \omega_0$ (la pulsation propre du filtre) | <input type="text"/> |
| b) $\omega \gg \omega_0$ (en hautes fréquences) | <input type="text"/> |
| c) $\omega \ll \omega_0$ (en basses fréquences) | <input type="text"/> |

**Entraînement 5.14 — Calcul de gain.**

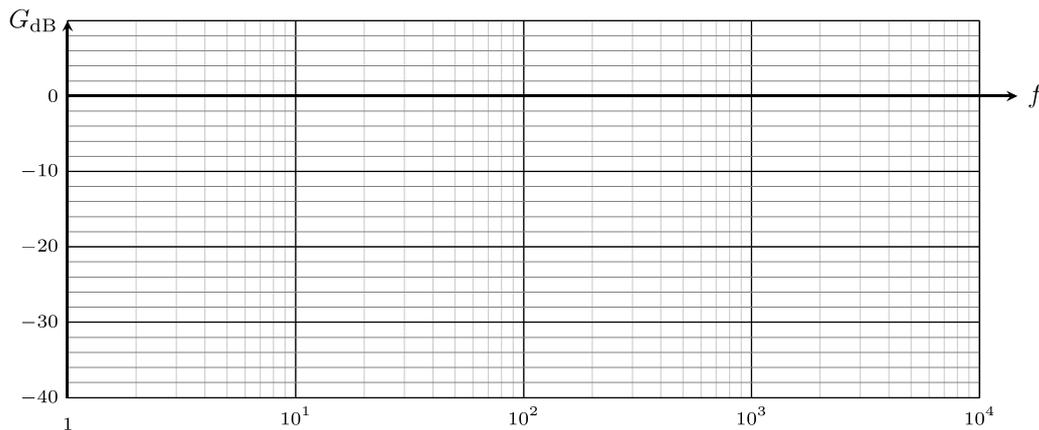
Pour les fonctions de transfert suivantes, évaluer le gain $G(x) = |\underline{H}(jx)|$ pour $x = 1$.

- a) $\underline{H}(jx) = \frac{1 - jx}{1 + jx}$
- b) $\underline{H}(jx) = -\frac{jx}{1 + jx}$
- c) $\underline{H}(jx) = \frac{1}{1 + 2jmx + (jx)^2}$ avec $m = 2$

Entraînement 5.15 — Tracé sur papier semi-logarithmique.

Un élève souhaite étudier le comportement d'un filtre passe-haut en basses fréquences. Pour cela, il relève les amplitudes des tensions d'entrée et de sortie pour différentes fréquences bien inférieures à la fréquence de coupure du filtre.

Fréquence (en Hz)	200	700	2 000
Amplitude du signal d'entrée ($U_{\text{entrée}}$ en V)	1	1	1
Amplitude du signal de sortie (U_{sortie} en V)	0,04	0,14	0,40



Le gain en décibel est donné par la relation $G_{\text{dB}} = 20 \log\left(\frac{U_{\text{sortie}}}{U_{\text{entrée}}}\right)$.

Calculer le gain en décibel pour chacune des fréquences et placer le point correspondant sur le graphe ci-dessus.

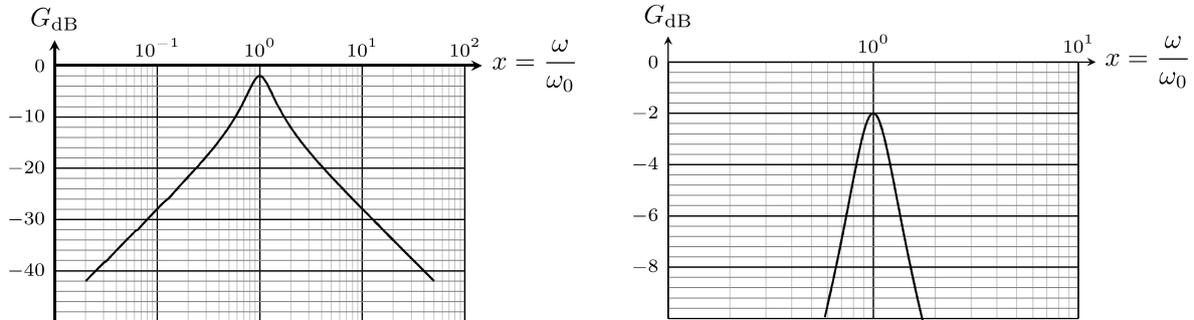
- a) Point A : $f = 200$ Hz.
- b) Point B : $f = 700$ Hz.
- c) Point C : $f = 2\,000$ Hz.
- d) Déterminer la pente de la droite passant les points A, B et C.

Entraînement 5.16 — Bande passante et facteur de qualité d'un filtre.



On dispose d'un filtre passe-bande de fréquence propre $f_0 = 15$ kHz, dont les deux fréquences de coupure à -3 dB sont f_{c1} et f_{c2} (avec $f_{c1} < f_{c2}$), et dont la fréquence de résonance est f_r .

Le diagramme de Bode en gain du filtre en fonction de $x = f/f_0$ et un agrandissement sont fournis.



À partir des graphiques donnés ci-dessus, déterminer les différentes grandeurs caractéristiques du filtre.

- a) f_r b) f_{c1} c) f_{c2}

Réponses mélangées

0	$\frac{1}{2} \cos(a+b) + \frac{1}{2} \cos(a-b)$	$\frac{RjL\omega}{R+jL\omega-RLC\omega^2}$	ⓔ
$20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - 10 \log\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right)$	$\underline{u}(2+jRC\omega) - \underline{u}_s$	$\frac{\pi}{2}$	$1/3$
$\frac{1/3}{1 + \frac{1}{3jRC\omega} + \frac{jRC\omega}{3}}$	10 kHz	$\sqrt{a^2+b^2}$	$\frac{R(1-LC\omega^2)}{1-LC\omega^2+jRC\omega}$
$19,2 \text{ kHz}$	$-8,0 \text{ dB}$	$1/\sqrt{2}$	$\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)$
ⓐ	$R + \frac{1}{jC\omega}$	1	$-\arctan\left(\frac{\omega}{3\omega_0}\right)$
$1/3$	ⓓ	ⓐ	$10 \log\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right)$
$1/3$	ⓐ	$1/3$	$\dot{i}_1 + \dot{i}_2$
$S_0 \cos(2\pi f_p t)$	b/a	$+20 \text{ dB/décade}$	$2,1 \times 10^4 \text{ rad/s}$
$\pi/2$	$\pi/2$	1	ⓓ
$\pi/2$	$\pi/2$	0	$\frac{1}{1+3jRC\omega-(RC\omega)^2}$
$\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)$	$\frac{mS_0}{2} \left(\cos(2\pi(f_p+f_0)t) + \cos(2\pi(f_p-f_0)t) \right)$	$9,5 \text{ dB}$	$15,0 \text{ kHz}$
$mS_0/2$	$11,7 \text{ kHz}$	$28,0 \text{ dB}$	$-28,0 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$
0	$L\omega$	$2,5 \text{ V}$	$-17,1 \text{ dB}$

Fiche n° 5. Étude des filtres

Réponses

- 5.1 a) $\sqrt{a^2 + b^2}$
- 5.1 b) b/a
- 5.1 c) \textcircled{e}
- 5.1 d) \textcircled{f}
- 5.2 a) R
- 5.2 b) 0
- 5.2 c) $L\omega$
- 5.2 d) $\pi/2$
- 5.2 e) $\frac{1}{C\omega}$
- 5.2 f) $-\pi/2$
- 5.3 a) $R + \frac{1}{jC\omega}$
- 5.3 b) $\frac{RjL\omega}{R + jL\omega}$
- 5.3 c) $\frac{RjL\omega}{R + jL\omega - RLC\omega^2}$
- 5.3 d) $\frac{R(1 - LC\omega^2)}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$
- 5.4 \textcircled{a}
- 5.5 a) 10 kHz
- 5.5 b) $2,5 \text{ V}$
- 5.6 \textcircled{d}
- 5.7 a) $\frac{1}{2} \cos(a + b) + \frac{1}{2} \cos(a - b)$
- 5.7 b)
$$S_0 \cos(2\pi f_p t) + \frac{mS_0}{2} \left(\cos(2\pi(f_p + f_0)t) + \cos(2\pi(f_p - f_0)t) \right)$$
- 5.7 c) S_0
- 5.7 d) $mS_0/2$
- 5.7 e) $mS_0/2$
- 5.7 f) \textcircled{a}
- 5.8 a) \textcircled{c}
- 5.8 b) \textcircled{a}
- 5.8 c) \textcircled{d}
- 5.8 d) \textcircled{b}
- 5.9 a) $\frac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3jRC\omega} + \frac{jRC\omega}{3}}$
- 5.9 b) $1/3$
- 5.9 c) $1/3$
- 5.9 d) $2,1 \times 10^4 \text{ rad/s}$
- 5.10 a) $i_1 + i_2$
- 5.10 b) $u(2 + jRC\omega) - u_s$
- 5.10 c) $\frac{1}{1 + 3jRC\omega - (RC\omega)^2}$
- 5.10 d) 1
- 5.10 e) $\frac{1}{RC}$
- 5.10 f) $1/3$
- 5.11 a) $9,5 \text{ dB}$
- 5.11 b) $20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$
- 5.11 c) $10 \log\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right)$

- 5.11 d) $10 \log \left(9 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right)$
- 5.11 e) $20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) - 10 \log \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 \right)$
- 5.11 f) $20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) + 10 \log \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 \right)$
- 5.12 a) 0
- 5.12 b) $\pi/2$
- 5.12 c) $\arctan \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)$
- 5.12 d) $-\arctan \left(\frac{\omega}{3\omega_0} \right)$
- 5.12 e) $\frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)$
- 5.12 f) $\frac{\pi}{2} + \arctan \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)$
- 5.13 a) $\pi/4$
- 5.13 b) 0
- 5.13 c) $\frac{\pi}{2}$
- 5.14 a) 1
- 5.14 b) $1/\sqrt{2}$
- 5.14 c) $1/4$
- 5.15 a) $-28,0 \text{ dB}$
- 5.15 b) $-17,1 \text{ dB}$
- 5.15 c) $-8,0 \text{ dB}$
- 5.15 d) $+20 \text{ dB/décade}$
- 5.16 a) $15,0 \text{ kHz}$
- 5.16 b) $11,7 \text{ kHz}$
- 5.16 c) $19,2 \text{ kHz}$

Corrigés

5.1 a) En multipliant les deux expressions de \underline{Z} par leur conjugué complexe, on obtient :

$$\underline{Z} \times \underline{Z}^* = (a + jb)(a - jb) = Z_0^2 (\cos(\varphi) + j \sin(\varphi))(\cos(\varphi) - j \sin(\varphi))$$

Après calcul, cette relation se réduit à $a^2 + b^2 = Z_0^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)$. Ainsi, on a $Z_0 = \sqrt{a^2 + b^2}$.

5.1 b) En égalant les parties réelles et imaginaires des deux expressions de \underline{Z} , on obtient :

$$a = Z_0 \cos(\varphi) \quad \text{et} \quad b = Z_0 \sin(\varphi).$$

Ainsi, on a $\cos(\varphi) = \frac{a}{Z_0}$ et $\sin(\varphi) = \frac{b}{Z_0}$. Puis, $\tan(\varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \frac{b}{Z_0} \frac{Z_0}{a}$. Donc, on a $\tan(\varphi) = \frac{b}{a}$.

5.1 c) On utilise une représentation géométrique du nombre complexe \underline{Z} . L'axe des abscisses et des ordonnées du plan complexe correspondent respectivement à la partie réelle et la partie imaginaire de \underline{Z} . L'argument φ est l'angle entre l'axe des abscisses et la droite passant par le centre du cercle et \underline{Z} .



On constate que si $a \geq 0$ alors φ est compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$.

De la même manière, on constate que si $a > 0$ et $b \leq 0$ alors φ est compris entre $-\pi/2$ exclu ($a > 0$) et 0 inclus.

5.2 a) On a $Z_0 = \sqrt{R^2 + 0} = R$.

5.2 b) On a $\tan(\varphi) = \frac{0}{R} = 0$. Donc, $\varphi = \arctan\left(\frac{0}{R}\right) = 0$.

5.2 c) On a $Z_0 = \sqrt{0 + (L\omega)^2} = L\omega$.

5.2 d) On a $\tan(\varphi) = \frac{L\omega}{0} \rightarrow +\infty$. Donc, $\varphi = \arctan\left(\frac{L\omega}{0}\right) = \frac{\pi}{2}$.

5.2 e) On a $\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega} = -j\frac{1}{C\omega}$. Donc, $Z_0 = \sqrt{0 + \left(-\frac{1}{C\omega}\right)^2} = \frac{1}{C\omega}$.

5.2 f) On a $\tan(\varphi) = -\frac{1}{C\omega} \frac{1}{0} \rightarrow -\infty$. Donc, $\varphi = \arctan\left(-\frac{1}{C\omega} \frac{1}{0}\right) = -\frac{\pi}{2}$.

5.3 a) On a $\underline{Z}_{AB} = R + \frac{1}{jC\omega}$.

5.3 b) Les deux dipôles sont associés en parallèle, nous devons sommer les admittances :

$$\underline{Y}_{AB} = \underline{Y}_R + \underline{Y}_L = \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} = \frac{R + jL\omega}{RjL\omega}.$$

Nous en déduisons alors l'expression de l'impédance complexe du dipôle AB : $\underline{Z}_{AB} = \frac{RjL\omega}{R + jL\omega}$.

5.3 c) Les trois dipôles sont associés en parallèle, nous devons sommer leurs admittances :

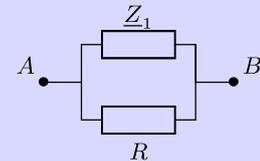
$$\underline{Y}_{AB} = \underline{Y}_R + \underline{Y}_L + \underline{Y}_C = \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} + jC\omega = \frac{R + jL\omega - RLC\omega^2}{RjL\omega}.$$

Nous en déduisons alors l'expression de l'impédance complexe du dipôle AB : $\underline{Z}_{AB} = \frac{RjL\omega}{R + jL\omega - RLC\omega^2}$.

5.3 d) On commence par considérer un circuit équivalent au circuit donné.

Le circuit donné est équivalent au schéma ci-contre, où on a

$$\underline{Z}_1 = jL\omega + \frac{1}{jC\omega} = \frac{1 - LC\omega^2}{jC\omega}.$$



L'admittance du dipôle est donc

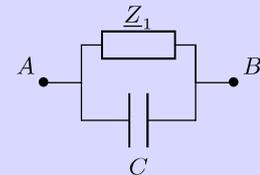
$$\underline{Y}_{AB} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{R + \underline{Z}_1}{R \times \underline{Z}_1} = \left(R + \frac{1 - LC\omega^2}{jC\omega} \right) \frac{1}{R \frac{1 - LC\omega^2}{jC\omega}} = \frac{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}{R(1 - LC\omega^2)}.$$

Nous en déduisons alors l'expression de l'impédance complexe du dipôle AB : $\underline{Z}_{AB} = \frac{R(1 - LC\omega^2)}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$.

5.4 On commence par considérer un circuit équivalent au circuit donné.

C'est le circuit ci-contre, avec $\underline{Z}_1 = R + jL\omega$. Ainsi, l'admittance équivalente est :

$$\underline{Y}_{AB} = jC\omega + \frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{jC\omega \times \underline{Z}_1 + 1}{\underline{Z}_1} = \frac{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}{R + jL\omega}.$$



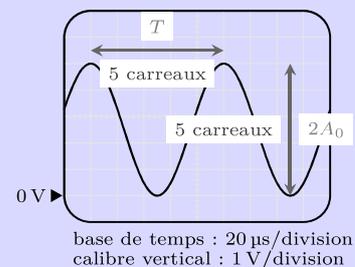
Nous en déduisons alors l'expression de l'impédance complexe du dipôle AB : $\underline{Z}_{AB} = \frac{R + jL\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$.

5.5 a)

La période du signal est sur 5 carreaux. La base de temps indique 20 μ s/division.

$$T = 5 \times 20 \times 10^{-6} \text{ s} \quad \text{soit} \quad T = 1 \times 10^{-4} \mu\text{s}.$$

La fréquence du signal observé est donc $f_0 = \frac{1}{T} = 10 \text{ kHz}$.



5.5 b) Nous avons 5 carreaux pour la double amplitude, soit $2U_0 = 5 \times 1 = 5 \text{ V}$. Donc, on a $U_0 = 2,5 \text{ V}$.

5.7 a) On calcule $\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2 \cos(a) \cos(b)$ et on en déduit la formule

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} \cos(a + b) + \frac{1}{2} \cos(a - b).$$

5.7 b) On calcule :

$$\begin{aligned} s(t) &= S_0 \cos(2\pi f_p t)(1 + m \cos(2\pi f_0 t)) = S_0 \cos(2\pi f_p t) + m S_0 \cos(2\pi f_p t) \cos(2\pi f_0 t) \\ &= S_0 \cos(2\pi f_p t) + \frac{m S_0}{2} \left(\cos(2\pi(f_p + f_0)t) + \cos(2\pi(f_p - f_0)t) \right). \end{aligned}$$

5.7 c) La composante de fréquence f_p de $s(t)$ est $S_0 \cos(2\pi f_p t)$, son amplitude est donc de S_0 .

5.7 d) La composante de fréquence $f_p + f_0$ de $s(t)$ est $\frac{m S_0}{2} \cos(2\pi(f_p + f_0)t)$, son amplitude est donc de $\frac{m S_0}{2}$.

5.7 e) La composante de fréquence $f_p - f_0$ de $s(t)$ est $\frac{m S_0}{2} \cos(2\pi(f_p - f_0)t)$, son amplitude est donc de $\frac{m S_0}{2}$.

5.8 a) Nous notons la somme de 3 fonctions sinusoïdales de fréquences respectives 1 kHz, 3 kHz et 5 kHz. Les spectres (a) et (d) ne peuvent pas convenir.

De plus, la valeur moyenne de $s_1(t)$ est nulle. Le spectre (c) est donc à associer à $s_1(t)$.

5.8 b) Nous notons la somme de 3 fonctions sinusoïdales de fréquences respectives 2 kHz, 4 kHz et 6 kHz. Les spectres (b) et (c) ne peuvent pas convenir.

De plus, la valeur moyenne de $s_2(t)$ est égale à 1 V. Le spectre (a) est donc à associer à $s_2(t)$.

5.8 c) Nous notons la somme de 3 fonctions sinusoïdales de fréquences respectives 2 kHz, 4 kHz et 6 kHz. Les spectres (b) et (c) ne peuvent pas convenir.

De plus, la valeur moyenne de $s_3(t)$ est nulle. Le spectre (d) est donc à associer à $s_3(t)$.

5.8 d) Nous notons la somme de 3 fonctions sinusoïdales de fréquences respectives 1 kHz, 3 kHz et 5 kHz. Les spectres (a) et (d) ne peuvent pas convenir.

De plus, la valeur moyenne de $s_4(t)$ est égale à 1 V. Le spectre (b) est donc à associer à $s_4(t)$.

5.9 a) À l'aide d'un pont diviseur de tension, on constate que $u_s = u_e \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \underline{H}(j\omega) &= \frac{u_s}{u_e} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{R}{1 + jRC\omega} \frac{1}{R + \frac{1}{jC\omega} + \frac{R}{1 + jRC\omega}} = \frac{R}{1 + jRC\omega} \frac{1 + jRC\omega}{3R + jR^2C\omega + \frac{1}{jC\omega}} \\ &= \frac{R}{3R + j(R^2C\omega - \frac{1}{C\omega})} = \frac{\frac{1}{3}}{1 + j\frac{1}{3}(RC\omega - \frac{1}{RC\omega})}. \end{aligned}$$

5.9 b) Par identification dans l'expression de $\underline{H}(j\omega)$ trouvée précédemment avec la forme canonique, nous en déduisons que $H_0 = \frac{1}{3}$.

5.9 c) Par identification dans l'expression de $\underline{H}(j\omega)$ trouvée précédemment avec la forme canonique, nous en déduisons que $Q = \frac{1}{3}$.

5.9 d) Par identification de l'expression de $\underline{H}(j\omega)$ trouvée précédemment avec la forme canonique, nous en déduisons que $x = RC\omega$ donc que $\omega_0 = \frac{1}{RC}$. L'application numérique donne

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} = \frac{1}{1 \times 10^3 \Omega \times 47 \times 10^{-9} \text{ F}} = 2,1 \times 10^4 \text{ rad/s.}$$

5.10 a) D'après la loi des noeuds $\underline{i} = \underline{i}_1 + \underline{i}_2$.

5.10 b) En multipliant la réponse précédente par la résistance R , on obtient $R\underline{i} = R\underline{i}_1 + R\underline{i}_2$.

Ainsi, d'après les trois égalités, on a

$$\underline{u}_e - \underline{u} = \underline{u} - \underline{u}_s + jRC\omega\underline{u} \quad \text{donc} \quad \underline{u}_e = \underline{u}(2 + jRC\omega) - \underline{u}_s.$$

5.10 c) En utilisant la réponse précédente et en exprimant \underline{u} à partir de la relation donnée, il vient que

$$\underline{u}_e = \underline{u}_s(1 + jRC\omega)(2 + jRC\omega) - \underline{u}_s = \underline{u}_s(1 + 3jRC\omega - (RC\omega)^2).$$

Ainsi, on a $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{1}{1 + 3jRC\omega - (RC\omega)^2}$.

5.10 d) En comparant les deux égalités

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + \frac{jx}{Q} - x^2} \quad \text{et} \quad \underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + 3jRC\omega - (RC\omega)^2}$$

on trouve $H_0 = 1$ et $x = \frac{\omega}{\omega_0} = RC\omega$ donc $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ et $Q = \frac{1}{3}$.

5.11 a) On a $G_{dB1} = 20 \log(\|3\|) = 20 \log(3) = 9,5 \text{ dB}$.

5.11 b) On a $G_{dB2} = 20 \log\left(\left|j\frac{\omega}{\omega_0}\right|\right) = 20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$.

5.11 c) On calcule

$$\begin{aligned} G_{dB3} &= 20 \log\left(\left|1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right|\right) = 20 \log\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}\right) = 20 \log\left(\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right) \\ &= 20 \times \frac{1}{2} \log\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right) = 10 \log\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right). \end{aligned}$$

5.11 d) On a

$$G_{dB4} = 20 \log(|\underline{H}_1 - \underline{H}_2|) = 20 \log\left(\left|3 - j\frac{\omega}{\omega_0}\right|\right) = 20 \log\left(\sqrt{9 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right) = 10 \log\left(9 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right).$$

5.11 e) On calcule

$$\begin{aligned} G_{dB5} &= 20 \log\left(\left|\frac{\underline{H}_2}{\underline{H}_3}\right|\right) = 20 \log\left(\frac{|\underline{H}_2|}{|\underline{H}_3|}\right) = 20 \log(|\underline{H}_2|) - 20 \log(|\underline{H}_3|) = G_{dB2} - G_{dB3} \\ &= 20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - 10 \log\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right). \end{aligned}$$

5.11 f) On calcule

$$\begin{aligned} G_{dB6} &= 20 \log(|\underline{H}_2 \times \underline{H}_3|) = 20 \log(|\underline{H}_2| \times |\underline{H}_3|) = 20 \log(|\underline{H}_2|) + 20 \log(|\underline{H}_3|) = G_{dB2} + G_{dB3} \\ &= 20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) + 10 \log\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right). \end{aligned}$$

5.12 a) On a $\varphi_1 = \arg(\underline{H}_1) = \arctan\left(\frac{\text{Im}(\underline{H}_1)}{\text{Re}(\underline{H}_1)}\right) = \arctan\left(\frac{0}{3}\right) = \arctan(0) = 0.$

5.12 b) On a $\varphi_2 = \arg(\underline{H}_2) = \arctan\left(\frac{\text{Im}(\underline{H}_2)}{\text{Re}(\underline{H}_2)}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}.$

5.12 c) On a $\varphi_3 = \arg(\underline{H}_3) = \arctan\left(\frac{\text{Im}(\underline{H}_3)}{\text{Re}(\underline{H}_3)}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{\omega}{\omega_1}}{1}\right) = \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right).$

5.12 d) On a $\varphi_4 = \arg(\underline{H}_1 - \underline{H}_2) = \arg\left(3 - j\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \arctan\left(\frac{-\frac{\omega}{\omega_0}}{3}\right) = \arctan\left(-\frac{\omega}{3\omega_0}\right) = -\arctan\left(\frac{\omega}{3\omega_0}\right).$

5.12 e) On a $\varphi_5 = \arg\left(\frac{\underline{H}_2}{\underline{H}_3}\right) = \arg(\underline{H}_2) - \arg(\underline{H}_3) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right).$

5.12 f) On a $\varphi_6 = \arg(\underline{H}_2 \times \underline{H}_3) = \arg(\underline{H}_2) + \arg(\underline{H}_3) = \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right).$

5.13 a) Notons que $x = \frac{\omega}{\omega_0} > 0$. Ainsi, on a

$$\varphi = \arg(\underline{H}(j\omega)) = \arg\left(\frac{jx}{1+jx}\right) = \arg(jx) - \arg(1+jx) = \arctan\left(\frac{x}{0}\right) - \arctan\left(\frac{x}{1}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x).$$

Pour $x = 1$, on obtient $\varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan(1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$

5.13 b) On a vu précédemment que $\varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$, ainsi pour $\omega \gg \omega_0$, soit $x \rightarrow +\infty$, il vient que

$$\varphi = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} - \arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0.$$

5.13 c) On a vu précédemment que $\varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$, ainsi pour $\omega \ll \omega_0$, soit $x \rightarrow 0$, il vient que

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan(0) = \frac{\pi}{2}.$$

5.14 a) Pour $x = 1$, $\underline{H}(jx) = \frac{1-j}{1+j}$, donc $G(x) = \left| \frac{1-j}{1+j} \right| = \frac{|1-j|}{|1+j|} = \frac{\sqrt{1+1}}{\sqrt{1+1}} = 1$.

5.14 b) Pour $x = 1$, $\underline{H}(jx) = -\frac{j}{1+j}$, donc $G(x) = \left| -\frac{j}{1+j} \right| = \frac{|j|}{|1+j|} = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

5.14 c) Pour $x = 1$ et $m = 2$, $\underline{H}(jx) = \frac{1}{1+4j+(j)^2} = \frac{1}{4j}$, donc $G(x) = \left| \frac{1}{4j} \right| = \frac{|1|}{|4j|} = \frac{1}{4}$.

5.15 a) On a $G_{dB} = 20 \log\left(\frac{0,04}{1}\right) = -28,0 \text{ dB}$.

5.15 b) On a $G_{dB} = 20 \log\left(\frac{0,14}{1}\right) = -17,1 \text{ dB}$.

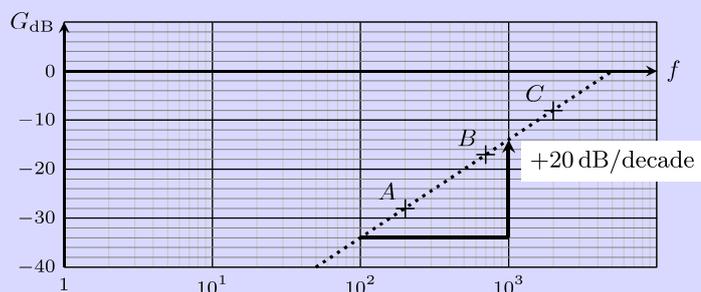
5.15 c) On a $G_{dB} = 20 \log\left(\frac{0,4}{1}\right) = -8,0 \text{ dB}$.

5.15 d) Si on mène l'application numérique, la pente a de la droite est

$$a = \frac{G_{dB}(C) - G_{dB}(A)}{\log(f(C)) - \log(f(A))} = \frac{-8,0 \text{ dB} + 28,0 \text{ dB}}{\log(2000) - \log(200)} = 20 \text{ dB}.$$

Donc, le gain du filtre augmente de 20 dB lorsque $\log(f)$ augmente d'une unité, soit lorsque la fréquence f est multipliée par 10, soit lorsque f augmente d'une décade.

La pente de la droite (AC) observée sur le graphe est bien de +20 dB/décade.



5.16 a) Nous observons un maximum pour $x = 1$. Nous en déduisons que $f_r = f_0 = 15,0 \text{ kHz}$.

5.16 b) La courbe de gain est maximale pour $x = 1$. Nous pouvons relever $G_{dB \text{ max}} = -2 \text{ dB}$.

Aux fréquences de coupures, le gain doit vérifier $G_{dB}(x_c) = G_{dB \text{ max}} - 3 \text{ dB} = -5 \text{ dB}$.

La première valeur de x_c collectée sur le graphique est $x_{c1} = 0,78$, elle correspond à une fréquence de coupure $f_{c1} = 0,78 \times f_0 = 11,7 \text{ kHz}$.

5.16 c) La seconde valeur de x_c collectée sur le graphique est $x_{c2} = 1,28$, elle correspond à une fréquence de coupure $f_{c2} = 1,28 \times f_0 = 19,2 \text{ kHz}$.