Page web du *Cahier d'entraînement*,
dernières versions

Ce cahier d'entraînement a été écrit collectivement par des professeurs en classes préparatoires scientifiques.

Coordination

Colas Bardavid et Jimmy Roussel

Équipe des participants

Stéphane Bargot, Claire Boggio, Cécile Bonnand, Alexis Brès, Geoffroy Burgunder, Erwan Capitaine, Caroline Chevalier, Maxime Defosseux, Raphaëlle Delagrange, Alexis Drouard, Gaelle Dumas, Alexandre Fafin, Jean-Julien Fleck, Aéla Fortun, Florence Goutverg, Chahira Hajlaoui, Mathieu Hebding, Lucas Henry, Didier Hérisson, Jean-Christophe Imbert, Fanny Jospitre, Tom Kristensen, Emmanuelle Laage, Catherine Lavainne, Maxence Miguel-Brebion, Anne-Sophie Moreau, Louis Péault, Isabelle Quinot, Valentin Quint, Alain Robichon, Caroline Rossi-Gendron, Nancy Saussac, Anthony Yip

Le pictogramme de l'horloge a été créé par Ralf Schmitzer (The Noun Project).

Le pictogramme du bulldozer a été créé par Ayub Irawan (The Noun Project).

Version 1.2.0 — 17 août 2024

Mode d'emploi

Qu'est-ce que le cahier d'entraînement ?

Le *cahier d'entraînement en physique-chimie* est un outil destiné à renforcer l'acquisition de **réflexes utiles en physique et en chimie**.

Il ne se substitue en aucun cas aux TD donnés par votre professeur ; travailler avec ce cahier d'entraînement vous permettra en revanche d'aborder avec plus d'aisance les exercices de physique-chimie.

Pour donner une analogie, on pourrait dire que ce cahier d'entraînement est comparable aux **exercices de musculation** d'un athlète : ils sont nécessaires pour mieux réussir le jour J lors de la compétition, mais ils ne sont pas suffisants : un coureur de sprint fait de la musculation, mais il fait également tout un tas d'autres exercices.

Ce cahier a été conçu par une large équipe de professeurs en classes préparatoires, tous soucieux de vous apporter l'aide et les outils pour réussir.

Comment est-il organisé ?

Le cahier est organisé en *fiches d'entraînement*, chacune correspondant à un thème issu du programme de première année d'enseignement supérieur.

Les thèmes choisis sont dans l'ensemble au programme de toutes les CPGE. De rares thèmes sont spécifiques à la filière PCSI, mais les intitulés sont suffisamment clairs pour que vous puissiez identifier facilement les fiches qui vous concernent.

Chaque fiche est composée d'une suite de petits exercices, appelés *entraînements*, dont le temps de résolution estimé est indiqué par une (), deux (), trois () ou quatre () horloges.

Les exercices « bulldozer »

Certains entraînements sont accompagnés d'un pictogramme représentant un bulldozer.

Ces entraînements sont **basiques et transversaux**.

Les compétences qu'ils mettent en jeu ne sont pas forcément spécifiques au thème de la fiche et peuvent être transversales.

Ce pictogramme a été choisi car le bulldozer permet de construire les fondations, et que c'est sur des fondations solides que l'on bâtit les plus beaux édifices. Ces entraînements sont donc le gage pour vous d'acquérir un socle solide de savoir-faire.

Comment utiliser ce cahier ?

Le cahier d'entraînement ne doit pas remplacer vos TD. Il s'agit d'un outil à utiliser en complément de votre travail « normal » en physique (apprentissage du cours, recherche de TD, recherche des DM).

Un travail personnalisé.

Le cahier d'entraînement est prévu pour être **utilisé en autonomie**.

Choisissez vos entraînements en fonction des difficultés que vous rencontrez, des chapitres que vous étudiez, ou bien en fonction des conseils de votre professeur.

Ne cherchez pas à faire linéairement ce cahier : les fiches ne sont pas à faire dans l'ordre, mais en fonction des points que vous souhaitez travailler.

Un travail régulier.

Pratiquez l'entraînement à un rythme régulier : **une dizaine de minutes par jour** par exemple. Privilégiez un travail régulier sur le long terme plutôt qu'un objectif du type « faire dix fiches par jour pendant les vacances ».

Un travail efficace.

Utilisez les réponses et les corrigés de façon appropriée : il est important de chercher suffisamment par vous-même avant d'aller les regarder. Il faut vraiment **persévérer** dans votre raisonnement et vos calculs avant d'aller voir le corrigé si vous voulez que ces entraînements soient efficaces.

Une erreur ? Une remarque ?

Si jamais vous voyez une erreur d'énoncé ou de corrigé, ou bien si vous avez une remarque à faire, n'hésitez pas à écrire à l'adresse `cahier.entrainement@gmail.com`.

Si vous pensez avoir décelé une erreur, merci de donner aussi l'identifiant de la fiche, écrit en gris en haut à gauche de chaque fiche.

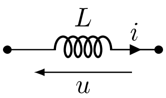
Étude des circuits électriques II

Prérequis
La fiche **Étude des circuits électriques I** et les équations différentielles.

Bobines

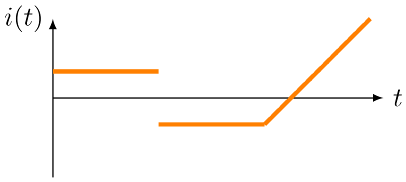
En convention récepteur, l'inductance L d'un bobine vérifie l'équation différentielle

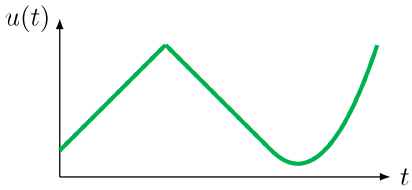
$$u(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}.$$



Entraînement 4.1 — Bobine ou pas ?

On donne l'évolution de l'intensité $i(t)$ et de la tension $u(t)$ aux bornes d'un dipôle inconnu.





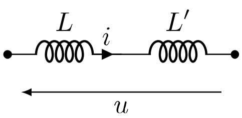
Ce dipôle inconnu se comporte-t-il comme une bobine ?

(a) oui (b) non

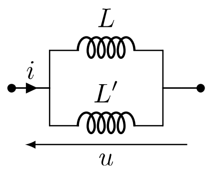
....

Entraînement 4.2 — Inductances équivalentes.

On considère deux bobines d'inductance L et L' regroupées dans les montages suivants :



montage (a)



montage (b)

a) Donner la relation entre u et i dans le montage (a) ....

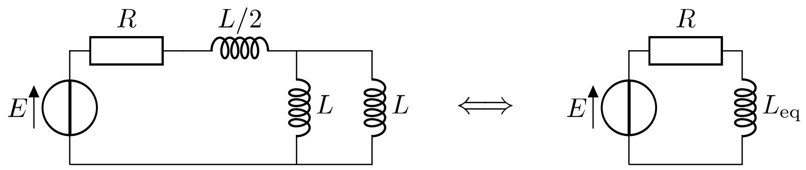
b) En déduire l'inductance équivalente du montage (a) ....

c) Donner la relation entre u et i dans le montage (b) ....

d) En déduire l'inductance équivalente du montage (b) ....

Entraînement 4.3 — Simplifions !

On souhaite remplacer les bobines par un dipôle équivalent.

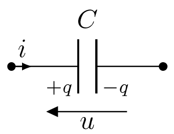


Déterminer L_{eq} ....

Condensateurs

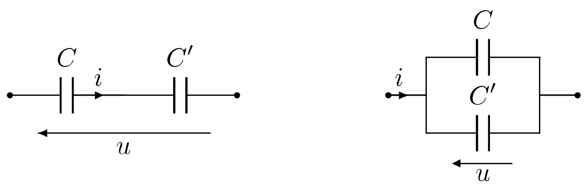
En convention récepteur, la capacité C d'un condensateur vérifie l'équation différentielle

$$i(t) = \frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}.$$



Entraînement 4.4 — Condensateurs équivalents.

On considère deux condensateurs de capacité C et C' regroupés dans les montages suivants :



montage (a) montage (b)

a) Donner la relation entre u et i dans le montage (a) ....

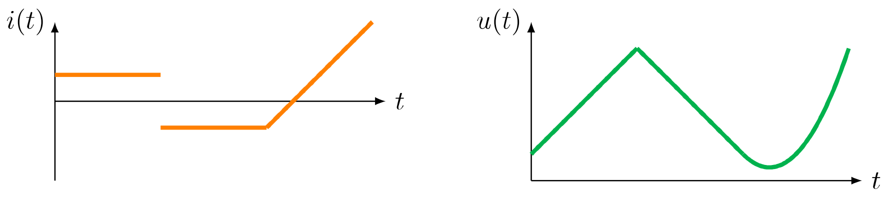
b) En déduire la capacité équivalente du montage (a) ....

c) Donner la relation entre u et i dans le montage (b) ....

d) En déduire la capacité équivalente du montage (b) ....

Entraînement 4.5 — Condensateur ou pas ?

On donne l'évolution de l'intensité $i(t)$ et de la tension $u(t)$ aux bornes d'un dipôle inconnu.



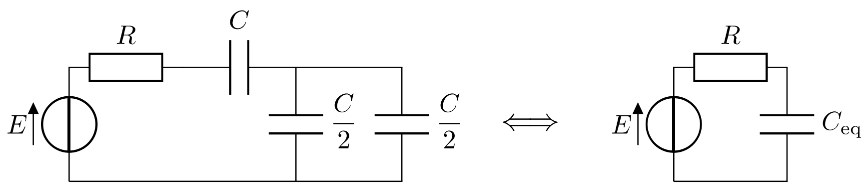
Ce dipôle inconnu se comporte-t-il comme un condensateur ?

(a) oui (b) non

....

Entraînement 4.6 — Simplifions !

On considère le montage suivant, constitué de plusieurs condensateurs, d'un générateur et d'un conducteur ohmique. On souhaite remplacer les condensateurs par un dipôle équivalent.



Déterminer C_{eq} ....

Conditions initiales et régime stationnaire

On utilisera dans cette partie les notations suivantes pour une grandeur donnée x :

- $x(0^-) = \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t<0}} x(t)$
- $x(0^+) = \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} x(t)$
- $x(+\infty) = \lim\limits_{t\to+\infty} x(t)$.

Entraînement 4.7 — Condensateurs et bobines en régime stationnaire.

En régime stationnaire, toutes les grandeurs électriques sont indépendantes du temps.

a) Dans ce cas, un condensateur se comporte comme :

(a) un interrupteur fermé (b) une source de tension (c) un interrupteur ouvert

....

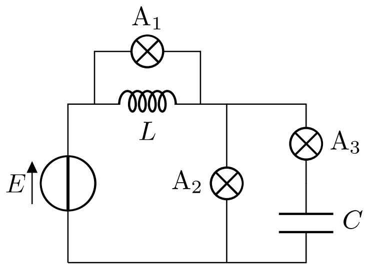
b) Quant à la bobine, elle se comporte comme :

(a) un interrupteur fermé (b) une source de courant (c) un interrupteur ouvert

....

Entraînement 4.8 — **Éclairage en régime permanent.**

On considère le circuit constitué de lampes (symbolisées par —⊗—) que l'on peut assimiler à des résistances qui brillent quand elles sont parcourues par un courant électrique.



Le régime permanent étant établi, la ou les ampoules qui brillent sont :

(a) l'ampoule A_1 (b) l'ampoule A_2 (c) l'ampoule A_3

....

Entraînement 4.9 — **Relations de continuité.**

Dans ce QCM, plusieurs réponses sont possibles pour chaque question.

a) Aux bornes de quel(s) dipôle(s) la tension est-elle toujours continue ?

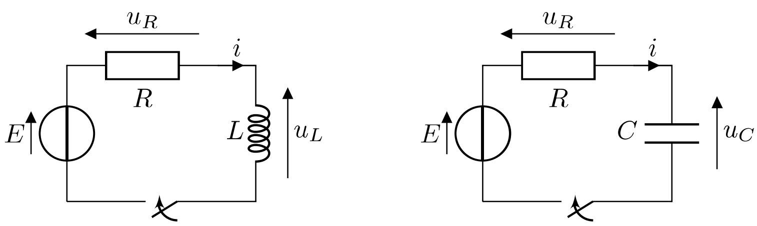
(a) une résistance (c) un condensateur

(b) une bobine (d) un interrupteur fermé

....

On considère les deux circuits (1) et (2) pour lesquels l'opérateur ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$.

On suppose de plus que le condensateur est initialement déchargé.



(1) (2)

b) Quelles sont les grandeurs continues à $t = 0$ pour le circuit (1) ?

(a) i (b) u_L (c) u_R

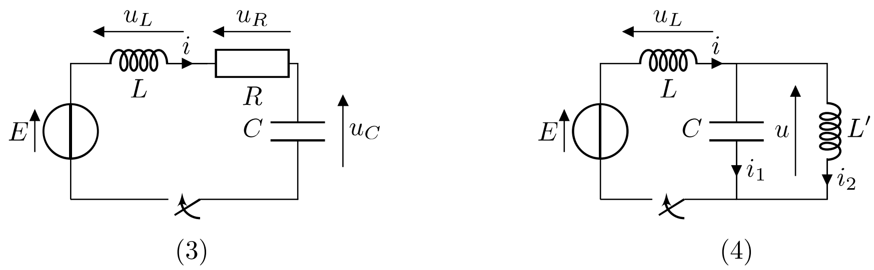
....

c) Quelles sont les grandeurs continues à $t = 0$ pour le circuit (2) ?

(a) i (b) u_C (c) u_R

....

On considère à présent les deux circuits (3) et (4) pour lesquels l'opérateur ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$. On suppose de plus que les condensateurs sont initialement déchargés.



d) Quelles sont les grandeurs continues à $t = 0$ pour le circuit (3) ?

(a) i (b) u_L (c) u_R (d) u_C

e) Quelles sont les grandeurs continues à $t = 0$ pour le circuit (4) ?

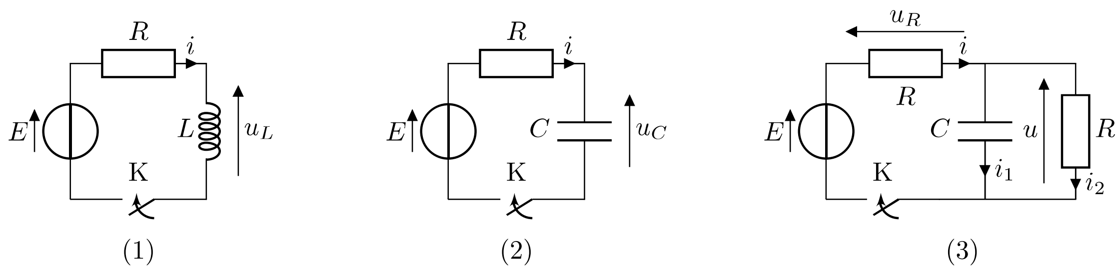
(a) i (b) i_1 (c) u (d) u_L

Entraînement 4.10 — Conditions initiales pour circuits du premier ordre.

On considère trois circuits constitués de générateurs de tension de fém constante E, de conducteurs de résistance R ainsi que de condensateurs de capacité C et d'une bobine d'inductance L.

L'interrupteur K est ouvert pour $t < 0$ et fermé pour $t > 0$.

Tous les condensateurs sont initialement déchargés.



On considère dans un premier temps le circuit (1).

a) Exprimer $i(0^+)$

b) Exprimer $u_L(0^+)$

On considère à présent le circuit (2).

c) Exprimer $i(0^+)$

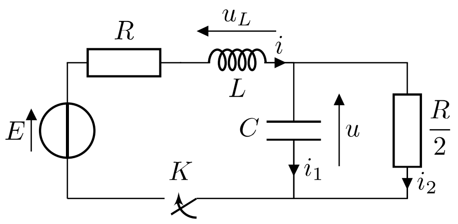
On considère finalement le circuit (3).

d) Exprimer $u_R(0^+)$

e) En déduire $i_1(0^+)$

Entraînement 4.11 — Circuit à deux mailles.

Le circuit suivant, constitué de deux mailles indépendantes, est alimenté par un générateur de tension de fém E constante.



Pour ce circuit, on considère de plus que :

- l'interrupteur K est ouvert pour $t < 0$ et fermé pour $t > 0$;
- le condensateur est initialement déchargé.

Exprimer :

a) $u(0^+)$ ....

b) $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+)$ ....

c) $i(+\infty)$ ....

d) $u(+\infty)$ ....

Circuits du premier ordre

On dit qu'un circuit est *du premier ordre* quand il est régi par une équation différentielle qui se met sous la forme canonique suivante :

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}x(t) = f(t) \qquad (*)$$

où τ est la constante de temps représentative de la durée du régime transitoire.

Quand l'équation différentielle est écrite comme dans $(*)$, on dit qu'elle est *sous forme canonique*.

Entraînement 4.12 — Constantes de temps.

On donne des exemples d'équations différentielles régissant des grandeurs électriques d'un circuit.

Dans chaque cas, déterminer l'expression de la constante de temps τ.

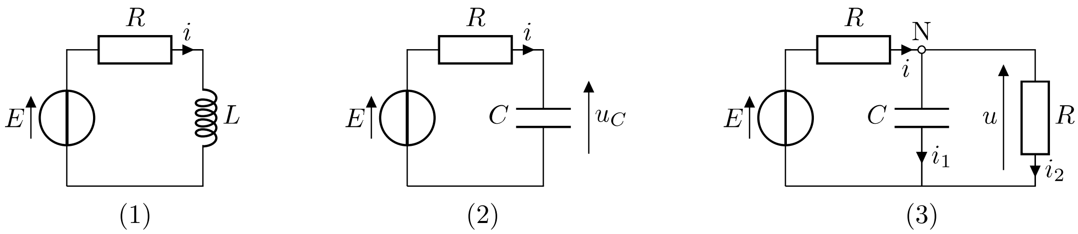
a) $L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = E - Ri(t)$ ....

b) $RC\dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} = E - 2u_C(t)$ ....

Entraînement 4.13 — Des mises en équations.

On cherche à obtenir l'équation différentielle qui régit le comportement d'une grandeur électrique dans chacun des circuits suivants.

Cette équation devra être donnée sous forme canonique.



On considère le circuit (1).

a) À partir de la loi des mailles, déterminer l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$

....

On considère maintenant le circuit (2). Déterminer :

b) l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$ ....

c) l'équation différentielle pour le courant $i(t)$ ....

On considère enfin le circuit (3) qui comporte deux mailles. En appliquant la loi des nœuds au point N, déterminer :

d) la relation entre le courant $i(t)$, la tension $u(t)$ et $\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$ ..

e) En déduire l'équation différentielle pour la tension $u(t)$ ...

Entraînement 4.14 — Allez, on s'entraîne !

N'oubliez pas d'exprimer une solution particulière avant d'appliquer les conditions initiales !

a) Résoudre $\dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\tau}u_C(t) = \dfrac{E}{\tau}$ avec $u_C(0) = 0$ ....

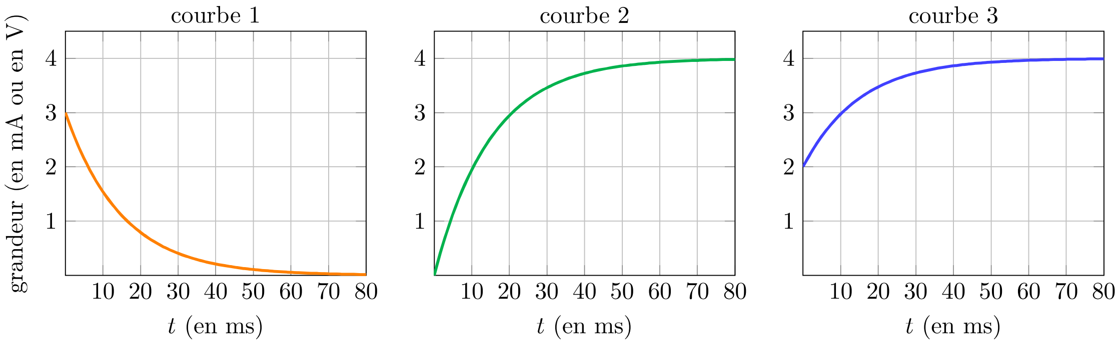
b) Résoudre $\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\tau}i(t) = 0$ avec $i(0) = \dfrac{E}{R}$ ....

c) Résoudre $\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\tau}u(t) = \dfrac{E}{2\tau}$ avec $u(0) = \dfrac{E}{2}$ ....

Entraînement 4.15 — Analyse de courbes.

Les graphes ci-dessous représentent l'évolution de trois grandeurs au cours du temps :

- deux tensions $u_1(t)$ et $u_2(t)$;
- une intensité $i(t)$.



a) On a

$$u_1(t) = E_1\left(1 - e^{-t/\tau}\right).$$

Quelle est la courbe correspondante ?

(a) courbe 1 (b) courbe 2 (c) courbe 3

. . . .

b) On a

$$u_2(t) = E_2\left(1 - \frac{e^{-t/\tau}}{2}\right).$$

Quelle est la courbe correspondante ?

(a) courbe 1 (b) courbe 2 (c) courbe 3

. . . .

c) On a

$$i(t) = \frac{E_1}{R}\,e^{-t/\tau}.$$

Quelle est la courbe correspondante ?

(a) courbe 1 (b) courbe 2 (c) courbe 3

. . . .

Déterminer les valeurs numériques de :

d) E_1 . . . .

e) E_2 . . . .

f) R . . . .

Circuits du second ordre

Entraînement 4.16 — Équation canonique.

De nombreux circuits du second-ordre sont en fait des oscillateurs dont l'équation canonique est de la forme

$$\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\,x(t) = f(t),$$

où ω_0 est appelée *pulsation propre* et Q *facteur de qualité*.

Donner la dimension de :

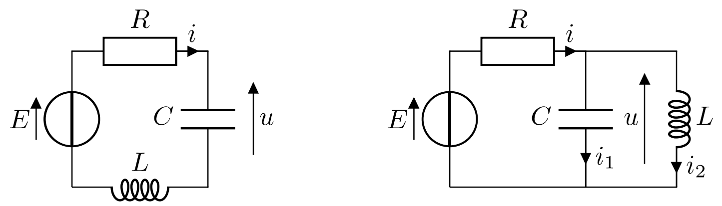
a) ω_0 .... b) Q ....

On considère l'équation $RC\frac{\mathrm{d}^2i(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}i(t) = 0$. Exprimer :

c) ω_0 .... d) Q ....

Entraînement 4.17 — Mise en équation.

On considère les deux circuits suivants, pour lesquels les fém des générateurs de tension E sont constantes.



montage 1 montage 2

À l'aide de la loi des mailles et des nœuds, établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u :

a) Dans le montage 1 ....

b) Dans le montage 2 ....

Entraînement 4.18 — Équations type « oscillateur harmonique ».

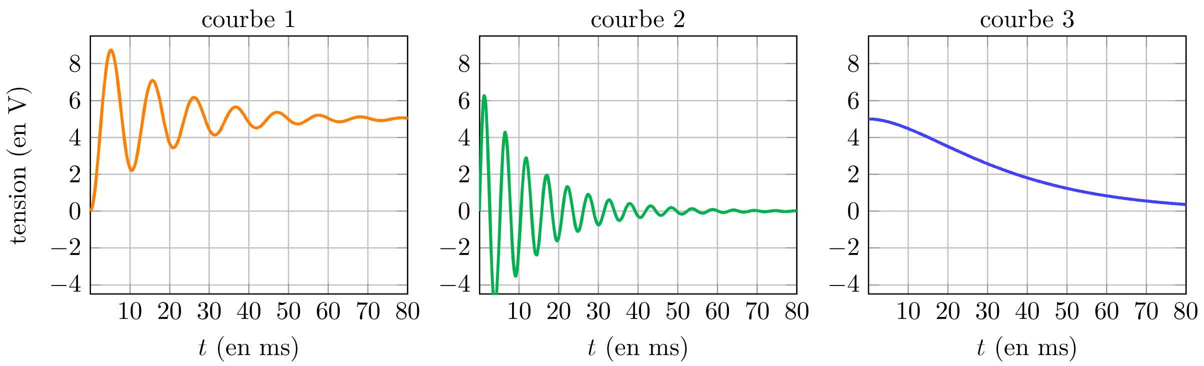
a) Résoudre $\frac{\mathrm{d}^2u_C(t)}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\,(u_C(t) - E) = 0$ avec $\begin{cases} u_C(0) = 0 \\ \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0) = 0 \end{cases}$.

b) Résoudre $\frac{\mathrm{d}^2i(t)}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\,i(t) = 0$ avec $\begin{cases} i(0) = 0 \\ \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0) = \frac{E}{L} \end{cases}$ ....

Entraînement 4.19 — Réponses d'un circuit du second-ordre.

Les graphes ci-dessous représentent l'évolution de trois tensions $u_1(t)$, $u_2(t)$, et $u_3(t)$ au cours du temps. Toutes ces grandeurs évoluent suivant une équation différentielle du type

$$\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\, x(t) = \mathrm{C^{te}}.$$



a) Quelle courbe est associée au plus grand facteur de qualité Q ?

(a) courbe 1 (b) courbe 2 (c) courbe 3

. . . .

b) On a

$$u_1(t) = a\mathrm{e}^{-t/\tau_1} - b\mathrm{e}^{-t/\tau_2}.$$

Quelle est la courbe correspondante ?

(a) courbe 1 (b) courbe 2 (c) courbe 3

. . . .

c) On a

$$u_2(t) = E\sin(\Omega t)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}.$$

Quelle est la courbe correspondante ?

(a) courbe 1 (b) courbe 2 (c) courbe 3

. . . .

d) On a

$$u_3(t) = E\left[1 - (\cos(\Omega' t) + a\sin(\Omega' t))\mathrm{e}^{-t/\tau'}\right].$$

Quelle est la courbe correspondante ?

(a) courbe 1 (b) courbe 2 (c) courbe 3

. . . .

e) Déterminer la valeur numérique de la pseudo-pulsation Ω qui intervient dans $u_2(t)$

. . . .

Réponses mélangées

$\frac{1}{3}E$ — (a), (b) et (c) — Q est sans dimension — $i = (C + C')\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ — $\frac{RC}{2}$ — (a), (c) et (d)

$\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}i(t) = 0$ — $4\,\mathrm{V}$ — (b) — $\frac{E}{R}$ — $u_C(t) = E\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$ — $u_C(t) = \frac{1}{2}E$

(a) — $E \times (1 - \cos(\omega_0 t))$ — $1{,}2 \times 10^3\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$ — $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u = 0$

(c) — $\frac{LL'}{L + L'}$ — (c) — $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u = \frac{E}{LC}$ — $C + C'$ — 0 — (b)

$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C'}\right)i$ — (c) — $L + L'$ — (c) et (d) — (b) — $\frac{C}{2}$ — $\frac{E}{R}$

$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + L'\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ — $4\,\mathrm{V}$ — $\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}u_C = \frac{1}{RC}E$ — (b) — $i(t) = \frac{E}{R}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$

$\frac{CC'}{C + C'}$ — 0 — L — $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{2}{RC}u = \frac{E}{RC}$ — $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ — $1{,}3\,\mathrm{k\Omega}$ — (a) — E

$[\omega_0] = T^{-1}$ — $R\sqrt{\frac{C}{L}}$ — (a) — (a) et (c) — (b) — $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{u}{L} + \frac{u}{L'}$ — $\frac{2E}{3R}$

$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}$ — 0 — E — $i = \frac{u}{R} + C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ — $\frac{E}{L\omega_0}\sin(\omega_0 t)$ — (a) — $\frac{L}{R}$ — (b)

► Réponses et corrigés page 216

Fiche n° 4. Étude des circuits électriques II

Réponses

4.1 .... $\boxed{\text{b}}$

4.2 a) .... $\boxed{u = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + L'\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}}$

4.2 b) .... $\boxed{L + L'}$

4.2 c) .... $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \dfrac{u}{L} + \dfrac{u}{L'}}$

4.2 d) .... $\boxed{\dfrac{LL'}{L + L'}}$

4.3 .... $\boxed{L}$

4.4 a) .... $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \left(\dfrac{1}{C} + \dfrac{1}{C'}\right)i}$

4.4 b) .... $\boxed{\dfrac{CC'}{C + C'}}$

4.4 c) .... $\boxed{i = (C + C')\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}}$

4.4 d) .... $\boxed{C + C'}$

4.5 .... $\boxed{\text{a}}$

4.6 .... $\boxed{\dfrac{C}{2}}$

4.7 a) .... $\boxed{\text{c}}$

4.7 b) .... $\boxed{\text{a}}$

4.8 .... $\boxed{\text{b}}$

4.9 a) .... $\boxed{\text{c et d}}$

4.9 b) .... $\boxed{\text{a et c}}$

4.9 c) .... $\boxed{\text{b}}$

4.9 d) .... $\boxed{\text{a, c et d}}$

4.9 e) .... $\boxed{\text{a, b et c}}$

4.10 a) .... $\boxed{0}$

4.10 b) .... $\boxed{E}$

4.10 c) .... $\boxed{\dfrac{E}{R}}$

4.10 d) .... $\boxed{E}$

4.10 e) .... $\boxed{\dfrac{E}{R}}$

4.11 a) .... $\boxed{0}$

4.11 b) .... $\boxed{0}$

4.11 c) .... $\boxed{\dfrac{2E}{3R}}$

4.11 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{3}E}$

4.12 a) .... $\boxed{\dfrac{L}{R}}$

4.12 b) .... $\boxed{\dfrac{RC}{2}}$

4.13 a) .... $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{R}{L}i = \dfrac{E}{L}}$

4.13 b) .... $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{RC}u_C = \dfrac{1}{RC}E}$

4.13 c) .... $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{RC}i(t) = 0}$

4.13 d) .... $\boxed{i = \dfrac{u}{R} + C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}}$

4.13 e) .... $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{2}{RC}u = \dfrac{E}{RC}}$

4.14 a) .... $\boxed{u_C(t) = E\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)}$

4.14 b) .... $\boxed{i(t) = \dfrac{E}{R}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}}$

4.14 c) .... $\boxed{u_C(t) = \dfrac{1}{2}E}$

4.15 a) .... $\boxed{\text{b}}$

4.15 b) .... $\boxed{\text{c}}$

4.15 c) .... $\boxed{\text{a}}$

4.15 d) .... $\boxed{4\,\text{V}}$

4.15 e) .... $\boxed{4\,\text{V}}$

4.15 f) .... $\boxed{1{,}3\,\text{k}\Omega}$

4.16 a) .... $\boxed{[\omega_0] = T^{-1}}$

4.16 b) .... $\boxed{Q \text{ est sans dimension}}$

4.16 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$

4.16 d) .... $\boxed{R\sqrt{\dfrac{C}{L}}}$

4.17 a) .... $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{LC}u = \dfrac{E}{LC}}$

4.17 b) .... $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{1}{RC}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{LC}u = 0}$

4.18 a) .... $\boxed{E \times (1 - \cos(\omega_0 t))}$

4.18 b) .... $\boxed{\dfrac{E}{L\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$

4.19 a) .... $\boxed{\text{b}}$

4.19 b) .... $\boxed{\text{c}}$

4.19 c) .... $\boxed{\text{b}}$

4.19 d) .... $\boxed{\text{a}}$

4.19 e) .... $\boxed{1{,}2 \times 10^3\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}}$

Corrigés

4.1 L'intensité est une succession de droites. Sa dérivée est donc constante par morceaux (et non définie au niveau de la discontinuité). Si le dipôle se comportait comme une bobine, la tension devrait être constante par morceaux ce qui n'est pas ce que l'on observe. Il ne s'agit donc pas d'une bobine.

....

4.2 a) En vertu de la loi d'additivité des tensions, on a $u = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + L'\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$.

....

4.2 b) On peut donc écrire $u = L_{\text{eq}}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ à condition de poser $L_{\text{eq}} = L + L'$.

....

4.2 c) En vertu de la loi des nœuds, on a $i = i_L + i_{L'}$ ce qui donne après dérivation $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \dfrac{u}{L} + \dfrac{u}{L'}$.

....

4.2 d) On peut écrire $u = L_{\text{eq}}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ à condition de poser

$$\frac{1}{L_{\text{eq}}} = \frac{1}{L} + \frac{1}{L'} \quad \text{soit} \quad L_{\text{eq}} = \frac{LL'}{L+L'}.$$

....

4.3 On commence par regrouper les deux bobines en parallèle. On obtient alors $L_1 = \dfrac{L \times L}{L + L} = \dfrac{L}{2}$. Cette bobine se retrouve alors en série avec la première d'où $L_{\text{eq}} = \dfrac{L}{2} + \dfrac{L}{2} = L$.

....

4.4 a) En vertu de la loi d'additivité des tensions, on a $u = u_C + u_{C'}$. Après dérivation par rapport au temps, on obtient $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \left(\dfrac{1}{C} + \dfrac{1}{C'}\right)i$.

....

4.4 b) On peut donc écrire $i = C_{\text{eq}} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ à condition de poser

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C'} \quad \text{soit} \quad C_{\text{eq}} = \frac{CC'}{C + C'}.$$

....

4.4 c) En vertu de la loi des nœuds, on a $i = i_C + i_{C'} = (C + C')\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.

....

4.4 d) On peut écrire $i = C_{\text{eq}} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ à condition de poser $C_{\text{eq}} = C + C'$.

....

4.5 Si le dipôle est un condensateur alors l'intensité est proportionnelle à la dérivé de la tension. La tension est constituée d'une droite croissante, puis d'une droite décroissante de pente opposée et enfin d'une parabole de type $at^2 + bt + c$ avec $a > 0$. Si l'on dérive la tension on obtient alors une constante positive, puis une constante opposée et enfin une droite croissante $(at + b)$. C'est bien ce que l'on observe.

Notez que la tension est continue ce qui est le propre d'un condensateur.

....

4.6 On commence par regrouper les deux condensateurs en parallèle. On obtient alors $C_1 = C/2 + C/2 = C$. Ce condensateur se retrouve alors en série avec le premier d'où $C_{\text{eq}} = \dfrac{C \times C}{C + C} = C/2$.

....

4.7 a) En régime stationnaire, on a $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 0$ d'où $i = 0$. Cela correspond à la relation constitutive de l'interrupteur ouvert, qui ne laisse pas passer le courant.

....

4.7 b) En régime stationnaire, on a $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$ d'où $u_L = 0$ ce qui correspond à la relation constitutive de l'interrupteur fermé.

....

4.8 En régime permanent, la bobine se comporte comme un fil et le condensateur comme un interrupteur ouvert. L'ampoule A_1 est court-circuitée et ne brille pas. Le courant dans la branche du condensateur est nul : l'ampoule A_3 est éteinte. Reste l'ampoule A_2 dont la tension à ses bornes est E : elle brille donc.

....

4.9 a) La tension aux bornes du condensateur est toujours continue ; de plus, la tension d'un interrupteur fermé est nulle, donc toujours continue.

Pour affirmer que la tension aux bornes d'un condensateur est continue, il faut se placer dans un cas où il n'existe pas de courants infinis pendant une durée infiniment brève.

....

4.9 b) Du fait de la présence de la bobine, l'intensité i du courant électrique est une grandeur continue. Vu que $u_R = Ri$, c'est aussi le cas de la grandeur u_R.

....

4.9 c) Du fait de la présence du condensateur, la tension u_C est une grandeur continue. En revanche i est discontinue : sa valeur passe de $i(0^-) = 0$ à $i(0^+) = E/R$. Par conséquent $u_R = Ri$ est également discontinue.

....

4.9 d) Le courant i circulant à travers une bobine est continu. On en déduit que $u_R = Ri$ est aussi continu. De plus, la tension u_C, aux bornes du condensateur est aussi continue. Seule la tension aux bornes de la bobine peut présenter une discontinuité.

....

4.9 e) Les courants i et i_2 sont continus car ces courants traversent une bobine. Ainsi, d'après la loi des nœuds, le courant i_1 l'est également.

La tension u est celle aux bornes du condensateur donc continue (la présence de la bobine en parallèle n'y change rien). Finalement, la tension u_L ne l'est pas car $u_L(0^-) = 0$ (régime stationnaire) et $u_L(0^+) = E$ (loi des mailles).

....

4.10 a) À $t = 0^-$, l'interrupteur K est ouvert donc $i(0^-) = 0$. De plus, ce courant circulant dans une bobine, il est continu, d'où finalement $i(0^+) = i(0^-) = 0$.

....

4.10 b) La tension u_L n'est pas nécessairement une grandeur continue, il convient alors d'appliquer la loi des mailles à l'instant $t = 0^+$ d'où $E = Ri(0^+) + u_L(0^+)$.

De plus, on a par continuité du courant (bobine dans la branche) $i(0^-) = i(0^+) = 0$ car K est initialement ouvert.

On en déduit finalement que $u_L(0^+) = E - R \times 0 = E$.

....

4.10 c) Le courant i n'est pas nécessairement une grandeur continue car il n'y a pas de bobine dans la branche. On applique alors la loi des mailles à l'instant $t = 0^+$ d'où $E = Ri(0^+) + u_C(0^+)$.

Or, on a $u_C(0^+) = u_C(0^-)$ (continuité de la tension aux bornes du condensateur) puis $u_C(0^+) = 0$ car ce dernier est initialement déchargé. On en déduit finalement que $i(0^+) = E/R$.

....

4.10 d) La tension u_R n'est pas nécessairement continue. On applique alors la loi des mailles (maille de gauche) à l'instant $t = 0^+$ d'où $E = u_R(0^+) + u(0^+)$.

Or, la tension u est à la fois celle du résistor mais aussi du condensateur car ces dipôles sont placés en parallèle. On en déduit que $u(0^+) = u(0^-)$ (continuité de la tension aux bornes du condensateur) puis $u(0^+) = 0$ car ce dernier est initialement déchargé d'où finalement $u_R(0^+) = E$.

....

4.10 e) On applique la loi des nœuds à l'instant $t = 0^+$ d'où $i(0^+) = i_1(0^+) + i_2(0^+)$.

De plus, on a $i_2(0^+) = u(0^+)/R = 0$ et $i(0^+) = u_R(0^+)/R = E/R$ d'après la question précédente. On en déduit finalement que $i_1(0^+) = E/R$.

....

4.11 a) La tension u aux bornes du condensateur est continue. De plus, on a $u(0^-) = 0$ car le condensateur est initialement déchargé. On en déduit que $u(0^+) = 0$.

....

4.11 b) Pour le condensateur, on a à l'instant $t = 0^+$, $i_1(0^+) = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+)$. Il convient alors de trouver l'expression de ce courant.

La loi des nœuds indique que $i(0^+) = i_1(0^+) + i_2(0^+)$. Or, on a $i(0^+) = i(0^-) = 0$ par continuité du courant circulant dans la bobine, et du fait de l'ouverture de K pour $t < 0$. De plus, on a $i_2(0^+) = 2u(0^+)/R = 0$. On en déduit que $i_1(0^+) = 0$ et donc que $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+) = 0$.

....

4.11 c) En régime stationnaire, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un fil. La loi des mailles indique alors $E = Ri(+\infty) + \dfrac{R}{2}i(+\infty)$ d'où au final $i(+\infty) = \dfrac{2E}{3R}$. Ce résultat aurait aussi pu être obtenu à l'aide d'un schéma équivalent.

....

4.11 d) En régime stationnaire, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un fil. On observe alors un pont diviseur de tension formé par les deux résistors restants.

On en déduit $u(+\infty) = \dfrac{R/2}{R + R/2} E = \dfrac{1}{3} E$.

....

4.12 a) On écrit l'équation sous sa forme canonique : $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{R}{L} i = \dfrac{E}{L}$. Ainsi, on identifie $\tau = L/R$.

....

4.12 b) De la même manière, l'équation mise sous forme canonique est $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \dfrac{2}{RC} i = \dfrac{E}{RC}$, d'où $\tau = \dfrac{RC}{2}$.

....

4.13 a) Le circuit ne peut être simplifié davantage. Il convient alors d'appliquer la loi des mailles $E = Ri + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ puis de mettre cette équation sous la forme canonique $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{R}{L} i = \dfrac{E}{L}$.

....

4.13 b) Le circuit ne peut être simplifié davantage. Il convient alors d'appliquer la loi des mailles $E = Ri + u_C$. L'équation constitutive du condensateur indique $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ d'où en combinant avec la loi des mailles

$$E = RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C.$$

On en déduit sa forme canonique $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{RC} u_C = \dfrac{1}{RC} E$.

....

4.13 c) La loi des mailles indique que $E = Ri + u_C$. Cette fois-ci, il faut garder i et remplacer u_C. Cependant, la relation constitutive du condensateur fait apparaître la dérivée temporelle de cette tension.

Il convient alors de dériver l'équation obtenue à l'aide de la loi des mailles et d'écrire $R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 0$. Finalement, on obtient $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{RC} i = 0$.

....

4.13 d) Le circuit comporte deux mailles indépendantes mais ne peut pas être simplifié. Il convient alors de faire particulièrement attention aux indices et variables utilisées pour les différents courants et tensions.

La loi des nœuds indique que $i = i_1 + i_2$ avec $i_2 = u/R$ et $i_1 = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$. On obtient alors en combinant ces résultats l'équation $i = \dfrac{u}{R} + C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.

....

4.13 e) La loi des nœuds ayant déjà été appliquée, il convient d'appliquer la loi des mailles pour la petite maille de gauche ; on en déduit $E = Ri + u$. On combine alors ce résultat avec celui de la question précédente pour obtenir que $E = u + RC\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u$ et au final $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{2}{RC} u = \dfrac{E}{RC}$.

....

4.14 a) Cherchons une solution particulière constante. On trouve $u_{\mathrm{p}} = E$. La solution générale est donc de la forme $A\mathrm{e}^{-t/\tau} + E$. La condition initiale donne $u_C(0) = 0 = A + E$ soit $A = -E$. Finalement, $u_C(t) = E\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$.

....

4.14 b) Ici, l'équation différentielle est homogène (sans second membre). La solution est de la forme $A\mathrm{e}^{-t/\tau}$. La condition initiale donne $i(0) = E/R = A$. Finalement, $i(t) = \dfrac{E}{R}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$.

....

4.14 c) Cherchons une solution particulière constante. On trouve $u_\mathrm{p} = \dfrac{1}{2}E$. La solution générale est donc de la forme $A\mathrm{e}^{-t/\tau} + \dfrac{1}{2}E$. La condition initiale donne $u(0) = \dfrac{1}{2}E = A + \dfrac{1}{2}E$ soit $A = 0$. Finalement, $u_C(t) = \dfrac{1}{2}E$.

....

4.15 d) La courbe 2, associée à l'expression de u_1, possède une asymptote horizontale d'expression $u_1(+\infty) = E_1$. On en déduit $E_1 = 4\,\mathrm{V}$ par lecture graphique.

....

4.15 e) La courbe 3, associée à l'expression de u_2, possède une valeur initiale $u_2(0^+) = \dfrac{1}{2}E_2$. On en déduit $E_2 = 4\,\mathrm{V}$ par lecture graphique. On peut vérifier que l'asymptote donne $u_2(+\infty) = E_2 = 4\,\mathrm{V}$.

....

4.15 f) La courbe 1, associée à l'expression de $i(t)$, a pour ordonnée à l'instant initial $i(0^+) = 3\,\mathrm{mA} = \dfrac{E_1}{R}$ donc on a $R = E_1/i(0^+) \simeq 1{,}3\,\mathrm{k\Omega}$.

....

4.16 a) On a dans le membre de gauche de l'équation d'ordre 2 : $\left[\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right] = \left[\omega_0^2\right][x]$ donc $[x]T^{-2} = \left[\omega_0^2\right][x]$. Finalement, on a $[\omega_0] = T^{-1}$.

....

4.16 b) On a dans le membre de gauche de l'équation d'ordre 2 : $\left[\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right] = \left[\dfrac{\omega_0}{Q}\right]\left[\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right]$ donc $[x]T^{-2} = T^{-1}\dfrac{[x]}{[Q]T}$. Finalement, on a $[Q] = 1$; donc, Q est sans dimension.

....

4.17 a) La loi des mailles indique que $E = Ri + u + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$. De plus, la relation constitutive du condensateur donne que $i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$. On en déduit que

$$E = RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u + LC\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} \quad \text{soit} \quad \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u = \frac{E}{LC}.$$

....

4.17 b) La loi des nœuds donne $i = i_1 + i_2$. Cependant, la relation constitutive de la bobine fait intervenir $\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$. On dérive alors la loi des nœuds puis on la combine avec les relations constitutives des deux dipôles de droite pour obtenir $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = C\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{u}{L}$.

La loi des mailles (petite maille de gauche) indique ensuite que $E = Ri + u$. On dérive cette relation pour faire apparaître la dérivée temporelle du courant puis on combine avec l'expression de cette dernière. D'où

$$0 = RC\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}u + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}.$$

On en déduit finalement son expression canonique $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{1}{RC}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{LC}u = 0$.

....

4.18 a) Cherchons une solution particulière constante (comme le second membre). On trouve $u_\mathrm{p} = E$. La solution générale est de la forme $A\cos(\omega_0 t + \varphi) + E$. Les conditions initiales donnent

$$\begin{cases} u_C(0) & = A\cos(\varphi) + E = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0) & = -A\omega_0\sin(\varphi) = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \varphi = 0 \\ A = -E. \end{cases}$$

On en déduit que $u_C(t) = E(1 - \cos(\omega_0 t))$.

....

4.18 b) La solution est de la forme $A\cos(\omega_0 t+\varphi)=a\cos(\omega_0 t)+b\sin(\omega_0 t)$. Appliquons les conditions initiales :

$$\begin{cases} i(0) & = a = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0) & = b\omega_0 = \dfrac{E}{L} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = \dfrac{E}{L\omega_0}. \end{cases}$$

On en déduit que $i(t)=\dfrac{E}{L\omega_0}\sin(\omega_0 t)$.

....

4.19 a) Le facteur de qualité est inférieur à 1/2 pour la courbe 3. De plus, il est sensiblement égal au nombre d'oscillations observables dans le cas du régime pseudo-périodique. On observe environ dix oscillations pour la courbe 2 et six pour la courbe 1. La courbe 2 possède donc le facteur de qualité le plus grand.

....

4.19 b) La fonction $u_1(t)$ ne contient pas de grandeurs circulaires ($\cos(\omega t)$ ou $\sin(\omega t)$) et évolue de $u_1(0)=a-b$ vers $u_1(+\infty)=0$. Cela correspond à la courbe 3.

....

4.19 c) La tension $u_2(t)$ présente des oscillations amorties et tend vers zéro lorsque t tend vers l'infini. Seule la courbe 2 vérifie ces propriétés.

....

4.19 d) On a $\lim\limits_{t\to+\infty} u_3(t)=E$. Seule la courbe 1 présente une asymptote horizontale d'ordonnée non nulle.

....

4.19 e) On détermine la pseudo période T en mesurant la durée correspondant à 10 oscillations : $10T \simeq 52\,\mathrm{ms}$ d'où $T\simeq 5{,}2\,\mathrm{ms}$. On en déduit $\Omega = 2\pi/T \simeq 1{,}2\times 10^3\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

....