MESURES ET INCERTITUDES

Les notions présentées dans ce document sont conformes aux règles internationales définies par le Bureau International des Poids et Mesure dans le document fondamental Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure (« GUM »)

Objectifs

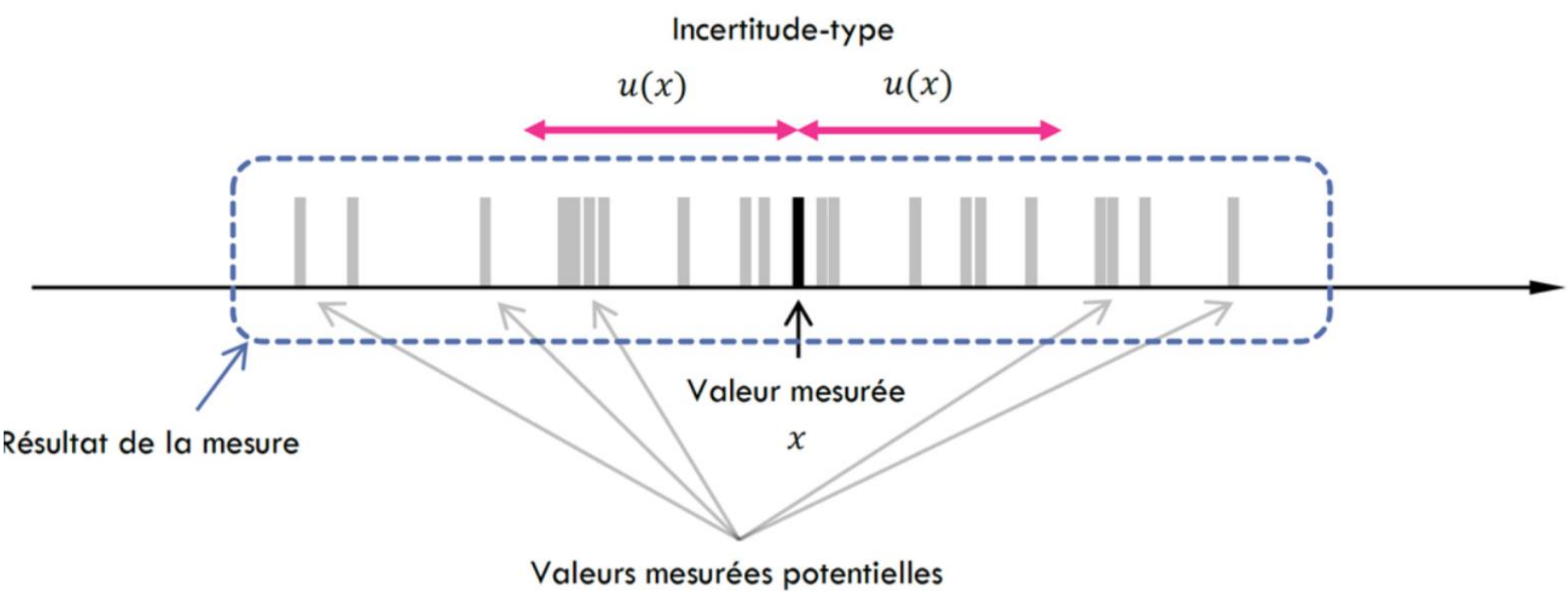
- Comprendre les notions de base sur la mesure et sa variabilité
- Comment évaluer expérimentalement une incertitude-type ?
- Comment confronter des données expérimentales à un modèle théorique ?

La mesure et sa variabilité

Variabilité de la mesure d'une grandeur physique

- Le résultat d'un mesurage n'est pas une valeur numérique unique mais plutôt un **ensemble de valeurs « raisonnablement attribuables » à la grandeur étudiée**.

- L'incertitude-type u(x) constitue alors une indication de la **dispersion** de cet ensemble de valeurs.



Ecriture du résultat d'une mesure

On note le résultat de la mesure x d'une grandeur X sous la forme :

$$X = \hat{x} \pm u(x)[unité]$$

À ne pas oublier!

Incertitude-type associée

meilleur estimateur de la valeur x

Etape ① : on arrondit l'incertitude-type à 2 chiffres significatifs (arrondi à la valeur la plus proche).

Etape ② : on fait en sorte que le dernier chiffre du meilleur estimateur possède la même position que le dernier chiffre de l'incertitude-type

Exemple :

Grandeur physique X mesurée ou mesurande	Valeur mesurée	Incertitude type
Résistance R	$4,20317\ k\Omega$	$5,236\ \Omega$
Ecriture standardisée	$R = 4,2032 \pm 0,0052\ k\Omega$	

Comment évaluer expérimentalement une incertitude-type ?

Evaluation de l’incertitude-type associée à un mesurage

2 situations expérimentales possibles

→ incertitude de type A

(approche statistique)

Cas où on est en mesure de répéter N fois le mesurage.

<u>Exemple</u> : on mesure à l’ohmètre la résistance de N conducteurs ohmiques supposés de même valeur de résistance

→ incertitude de type B

(approche probabiliste)

Cas où il est difficile de répéter plusieurs fois le mesurage.

<u>Exemple</u> : Détermination de la concentration d’une solution aqueuse lors d’un dosage

Evaluation de l'incertitude-type associée à un mesurage
Incertitude de type A

On réalise N mesures $\{x_1, x_2 \dots x_N\}$ de la valeur d'une grandeur physique X dans les mêmes conditions expérimentales :

➡ le meilleur estimateur de la valeur de la grandeur X est la moyenne :

$$\hat{x} = \overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{1}^{N} x_i$$

➡ l'incertitude-type sur cette moyenne vérifie : $u(\overline{x}) \approx \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$

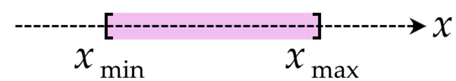
où $\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}{N-1}}$ est l'écart-type de cet ensemble de valeurs observées.

On retiendra ainsi que la répétition d'un mesurage permet une estimation plus précise de la valeur d'une grandeur physique

Evaluation de l'incertitude-type associée à un mesurage
Incertitude de type B

<u>1ère situation</u> : La documentation de l'appareil de mesure n'est pas accessible
(exemple : régle graduée)

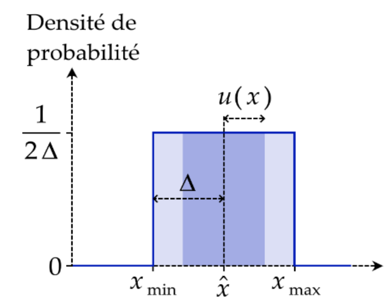
Cette situation peut correspondre aux cas usuels suivants :



On définit alors « *naturellement* » :

➡ le meilleur estimateur de la valeur de la grandeur X : $\hat{x} = \frac{x_{max} + x_{min}}{2}$

➡ l'incertitude-type associée : $u(x) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}$ avec $\Delta = \frac{x_{max} - x_{min}}{2}$



Evaluation de l’incertitude-type associée à un mesurage
Incertitude de type B

<u>2nd situation</u> : La documentation de l’appareil de mesure est accessible *(exemple : Multimètre)*

➡ Le meilleur estimateur est la valeur lue.

➡ Pour l’incertitude type, le constructeur fournit le plus souvent une « incertitude constructeur » ou une « précision»,
Conformément aux préconisations du GUM : cette donnée s’identifie à la demi-étendue Δ d’un intervalle de valeurs possibles centré sur la valeur lue.
L’incertitude-type vaut alors : $u(x) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}$

<u>Remarques</u> :
Dans certains cas, le constructeur de l’appareil de mesure fournit directement l’incertitude-type (ou éventuellement une incertitude dite « élargie », qui correspond à l’incertitude-type multipliée par un facteur numérique de valeur connue) : on se contente alors de récupérer cette valeur de u(x) .
Attention, la précision Δ donnée par le constructeur peut parfois dépendre du calibre utilisé et de la plage de valeurs mesurées.

Composition des incertitudes

Composition des incertitudes

Très souvent, la grandeur physique d'intérêt G n'est pas une grandeur directement accessible par mesurage mais peut s'obtenir en combinant entre elles d'autres grandeurs physiques mesurables X et Y.

1ère situation : utilisation des formules de composition des incertitudes

$G(X,Y)$	λX	$X+Y$	$X-Y$	$X\times Y$	$\frac{X}{Y}$	X^{λ}
$u(g)$	$\lvert\lambda\rvert\, u(x)$	$\sqrt{u(x)^2+u(y)^2}$		$g\times\sqrt{\left(\frac{u(x)}{x}\right)^2+\left(\frac{u(y)}{y}\right)^2}$		$g\times\lvert\lambda\rvert\times\frac{u(x)}{x}$

g, x et y sont les valeurs mesurées associées aux mesurandes G, X et Y

Composition des incertitudes

2$^{\text{ème}}$ situation : La simulation Monte Carlo 

Dans le cas d'une relation de la forme G = f(X, Y) , la mise en œuvre de la simulation Monte-Carlo repose sur les étapes suivantes :

① On fixe un nombre N_{sim} de simulations à réaliser (avec $N_{sim} >> 1$ afin de traduire le plus fidèlement possible les variabilités des grandeurs X et Y).

② A chaque itération k (pour k allant 1 à N_{sim}) :

- On effectue un tirage aléatoire de valeurs numériques (x_k , y_k) en adoptant les lois de distribution adéquates pour X et Y
- On calcule la valeur correspondante de la grandeur G : $g_k = f\ (x_k , y_k)$

③ La meilleure estimation $\hat{g}$ de la valeur de la grandeur G correspond alors à la moyenne de cet ensemble des $\{g_k\}$ et l'incertitude-type $u(g)$ à l'écart-type de cet ensemble.

Comparaison de deux résultats de mesure Validation du mesurage

Comment comparer deux résultats de mesure entre eux?
Validation du mesurage

<u>1ère situation</u> : comparaison entre deux valeurs connues avec incertitudes :

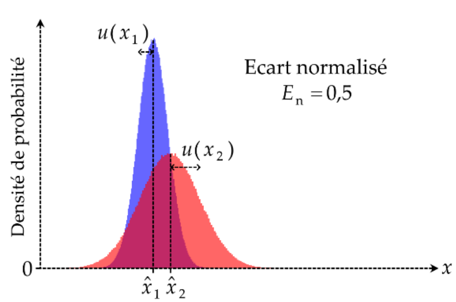
Lorsque deux processus de mesurage d'une même grandeur X conduisent à des résultats :

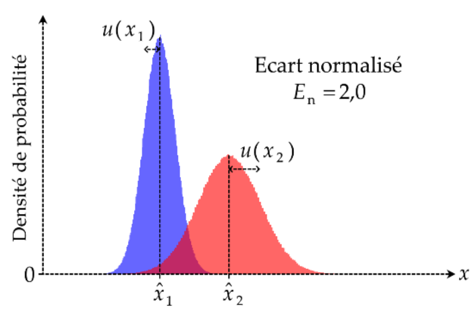
$$\hat{x}_1 \pm u(x_1) \quad \text{et} \quad \hat{x}_2 \pm u(x_2)$$

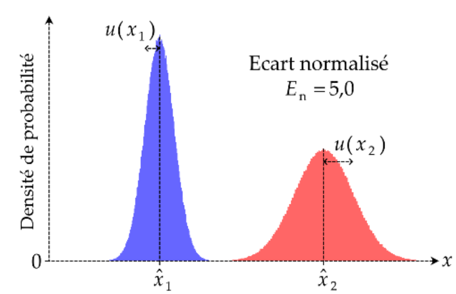
On appelle écart normalisé ou **z-score** la grandeur sans dimension suivante :

$$\mathrm{E_n} = \mathrm{z} = \frac{|\hat{x}_1 - \hat{x}_2|}{\sqrt{u(x_1)^2 + u(x_2)^2}}$$

Par convention, les deux valeurs $\hat{x}_1$ et $\hat{x}_2$ sont dites compatibles si $z \leq 2$







Comment comparer deux résultats de mesure entre eux?

Validation du mesurage

2nd situation : comparaison entre une valeur expérimentale et une valeur connue sans incertitudes :

Le processus de mesurage de la mesurande X conduisent au résultat : $\hat{x}_{exp} \pm \; u(x_{exp})$
La valeur attendue x_a peut nous être donnée sans incertitude (ex : valeur tabulée)
L'écart normalisé ou **z-score** devient :

$$\mathrm{E_n} = \mathrm{z} = \frac{\left|x_a - \hat{x}_{exp}\right|}{u(x_{exp})} \leq 2$$

c'est-à-dire que $x_a \in [\hat{x}_{exp} - 2\, u(x_{exp}); \hat{x}_{exp} + 2\, u(x_{exp})]$