

Détection des ondes gravitationnelles

Les données numériques utiles sont fournies en fin de partie.

Einstein a postulé l'existence des ondes gravitationnelles en 1916 comme une conséquence de sa théorie de la relativité générale. La première mise en évidence expérimentale indirecte des ondes gravitationnelles a été effectuée par Joseph Taylor et Russell Hulse en 1974 par l'observation d'un système de deux étoiles à neutrons orbitant l'une autour de l'autre de plus en plus vite. Le prix Nobel leur a été attribué en 1993.

La détection directe des ondes gravitationnelles a été effectuée en 2016 par l'instrument LIGO (Laser Interferometer Gravitational-wave Observatory). LIGO est un ensemble de deux interféromètres géants situés aux États-Unis. Il s'agit d'une collaboration scientifique cofondée en 1992 par Kip Thorne et Ronald Drever de Caltech et Rainer Weiss du MIT.

De nombreux instituts de recherches et plus de 900 scientifiques à travers le monde sont impliqués dans le fonctionnement et l'analyse des données de LIGO.

1 Questions préliminaires

On considère un astre A à distribution de masse à symétrie sphérique de rayon R, de masse totale M et de centre O. On rappelle que la force gravitationnelle exercée par l'astre sur un point matériel P de masse m situé à une distance de $r > R$ du centre O est donnée par : $\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \vec{u}_r$

- 1.1 Donner la signification de chacun des termes figurant dans l'expression ci-dessus.
- 1.2 Montrer que cette force dérive d'une énergie potentielle dont on donnera l'expression. On prendra l'énergie potentielle nulle à l'infini.
- 1.3 Donner l'expression de l'énergie mécanique E_m du point P.
- 1.4 Montrer que cette énergie mécanique reste constante au cours du temps.
- 1.5 On appelle vitesse de libération la vitesse minimale v_ℓ qui doit être donnée à un objet à la surface d'un astre pour qu'il puisse s'éloigner indéfiniment de ce dernier. Donner l'expression de la vitesse de libération de l'astre A.
- 1.6 Le rayon de Schwarzschild R_s définit le rayon de la sphère qui aurait, pour une masse donnée, une vitesse de libération égale à la vitesse de la lumière. Donner l'expression du rayon de Schwarzschild d'un objet de masse M.
- 1.7 Comment appelle-t-on un astre dont le rayon R vérifie $R \leq R_s$?

Les ondes électromagnétiques sont des perturbations du champ électromagnétique. Les ondes gravitationnelles correspondent à des perturbations de l'espace-temps lui-même. Elles se propagent à la même vitesse que les ondes électromagnétiques dans le vide. La déformation associée à l'onde s'effectue dans des directions orthogonales à la direction de propagation.

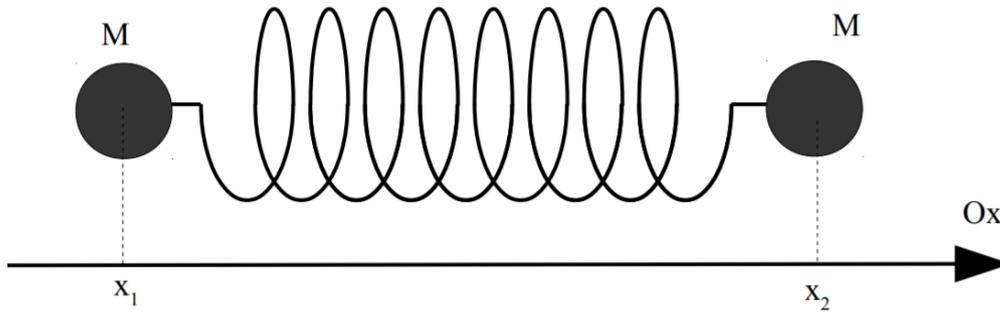
L'amplitude d'une onde gravitationnelle est usuellement associée à un paramètre adimensionné noté h. Cette amplitude correspond à la variation relative de distance entre les deux masses test lors du passage de l'onde.

2 Barres de Weber

Les premiers dispositifs construits pour détecter les ondes gravitationnelles ont été conçus par le physicien américain Joseph Weber dans les années soixante. Le principe du détecteur est de mesurer la déformation d'un cylindre d'aluminium d'environ 2 m de long et de 1 m de rayon. Lorsqu'une onde gravitationnelle atteint la barre, elle provoque la vibration de cette dernière.

On cherche à déterminer l'amplitude de cette vibration. Pour cela, on modélise, dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, le détecteur par un ensemble de deux masses M identiques reliées par un

ressort de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 , soumise à une force de frottement fluide (voir figure 1 ci dessous).



On suppose que la force de frottement fluide \vec{f}_1 qui s'exerce sur la masse d'abscisse x_1 est modélisée par l'expression : $\vec{f}_1 = -\alpha\left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt}\right)\vec{u}_x$

La force de frottement fluide \vec{f}_2 qui s'exerce sur la masse d'abscisse x_2 vérifie $\vec{f}_1 = -\vec{f}_2$

2.1 Montrer que l'équation du mouvement de la masse d'abscisse x_1 s'écrit :

$$M \frac{d^2x_1}{dt^2} = k(x_2 - x_1 - \ell_0) - \alpha\left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt}\right)$$

2.2 On pose $\xi = x_2 - x_1 - \ell_0$. Montrer que la variable ξ vérifie l'équation : $\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d\xi}{dt} + \omega_0^2 \xi = 0$

On donnera l'expression et la signification des paramètres ω_0 et Q .

On suppose qu'une onde gravitationnelle sinusoïdale atteint le dispositif. Ce dernier est placé de façon à ce que la direction Ox soit perpendiculaire à la direction de la perturbation caractérisant l'onde. On montre alors que l'action de cette dernière sur le système se traduit par l'apparition d'une force excitatrice sinusoïdale. L'équation du système est alors donnée par :

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d\xi}{dt} + \omega_0^2 \xi = \frac{1}{2} \ell_0 \frac{d^2h}{dt^2} \quad \text{avec } h(t) = h_m \cos(\omega t).$$

2.3 À quelle condition peut-on se placer en régime sinusoïdale forcé ? On supposera celle-ci vérifiée dans la suite.

On écrit la solution sous la forme $\xi(t) = \xi_m \cos(\omega t + \varphi)$.

2.4 On note $\underline{\xi}_m$ l'amplitude complexe associée à $\xi(t)$. Donner l'expression de $\underline{\xi}_m$ en fonction de \underline{h} et φ . Donner également l'expression de \underline{h} , grandeur complexe associée à $h(t)$.

2.5 Montrer que l'on a $\underline{\xi}_m = -\frac{1}{2} \frac{\ell_0 \omega^2 h_m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega \frac{\omega_0}{Q}}$

2.6 Déterminer l'expression de l'amplitude ξ_m ainsi que celle de $\tan \varphi$.

2.7 Dans le cas où le paramètre Q vérifie $Q \gg 1$, comment choisir la valeur de la pulsation propre pour que l'amplitude ξ_m soit maximale ?

On cherche à estimer un ordre de grandeur de la sensibilité de ce type de détecteur. On considère toujours le modèle présenté précédemment.

2.8 En supposant que les masses en x_1 et x_2 vibrent à la même amplitude et en opposition de phase, montrer que l'énergie mécanique moyenne associée à un mode de vibration de pulsation ω_0 s'écrit :

$$E_{\text{moyenne}} = \frac{1}{16} M \ell_0^2 \omega_0^2 Q^2 h_m^2$$

Pour estimer la sensibilité du détecteur, on propose de comparer l'énergie E_{moyenne} associée au passage d'une onde gravitationnelle au bruit thermique dû au mouvement erratique des atomes constituant la matière.

2.9 En attribuant une énergie thermique de l'ordre de $k_B T$ au détecteur à la température T , donner l'expression de l'amplitude minimale d'une onde gravitationnelle susceptible d'être détectée par le dispositif.

2.10 Faire l'application numérique.

On prendra : $Q=10^5$, $M=10^3$ kg, $\ell_0=1$ m, $T=300$ K et $\omega_0 = 10^4$ rad · s⁻¹

2.11 Comment améliorer « simplement » la sensibilité du détecteur ?

3 Interféromètre LIGO

Au début des années 1990, plusieurs projets d'expériences à grande échelle, et par la taille du dispositif et par le nombre de scientifiques impliqués, ont vu le jour, comme les projets LIGO aux États-Unis ou Virgo en Europe. Il s'agit pour ces deux expériences d'utiliser un interféromètre de Michelson géant.

LIGO est constitué de deux interféromètres de Michelson d'une longueur de 4 km construits à plus de 3000 km l'un de l'autre.

Dans cette dernière partie, on cherche à estimer la sensibilité d'un tel détecteur. Le schéma (figure 2) est une représentation simplifiée d'un interféromètre de Michelson.

On admet que :

- lorsque $d_1 = d_2$, la différence de phase $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ entre les faisceaux est égale à 0.
- le faisceau laser utilisé est parfaitement monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 1064 \text{ nm}$, est caractérisé par une puissance $P_0 = 200 \text{ W}$ et une section S .
- chaque onde est caractérisée par une amplitude complexe \underline{A} et une intensité lumineuse moyenne I (homogène à une puissance surfacique) telle que $I = |\underline{A}|^2$.
- les amplitudes complexes \underline{A}_1 et \underline{A}_2 associées aux faisceaux (1) et (2) arrivant au niveau du détecteur vérifient $|\underline{A}_1|^2 = |\underline{A}_2|^2 = \frac{P_0}{4S}$
- le signal délivré par le détecteur correspond à la puissance lumineuse $P = S \cdot I$ où S est la section du faisceau.

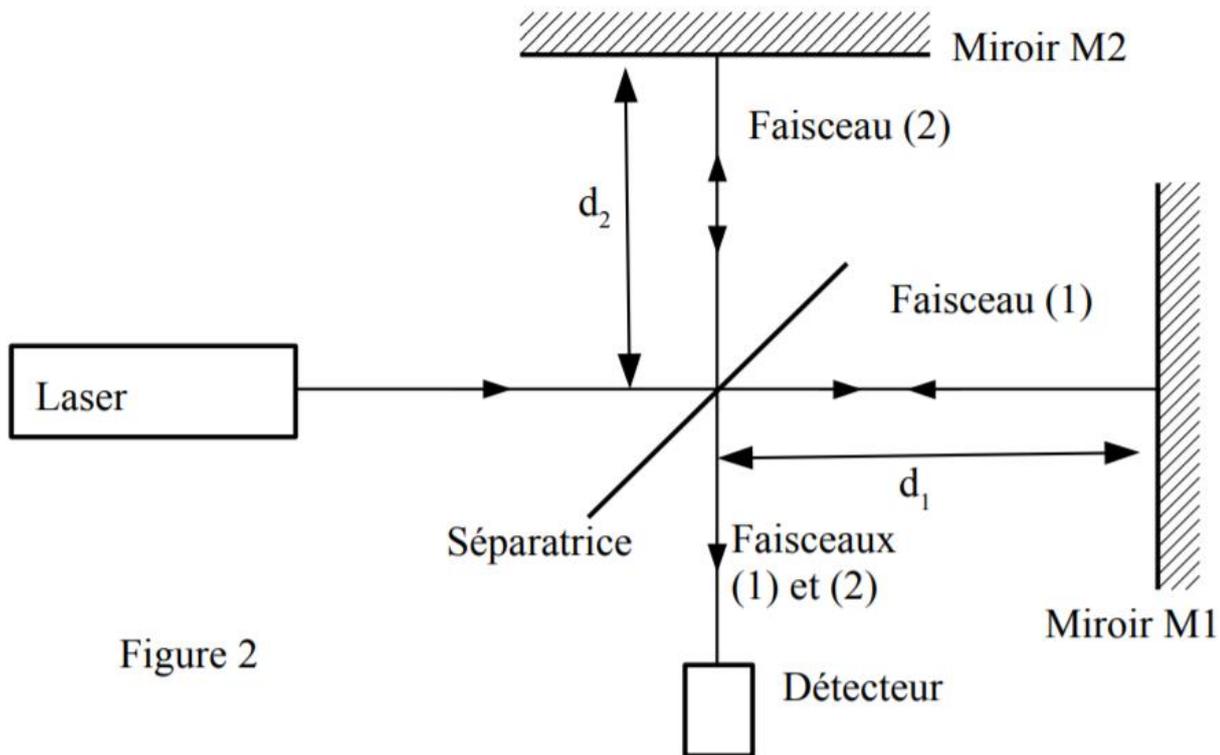


Figure 2

3.1 Justifier que la différence de marche δ entre le faisceau 2 et le faisceau 1 s'écrit $\delta = 2(d_2 - d_1)$

3.2 Montrer que la puissance lumineuse reçue par le détecteur s'écrit : $P = \frac{P_0}{2} [1 + \cos(k\delta)]$

L'interféromètre de Michelson est réglé de façon à avoir une différence de marche δ_i et $d_2 = L$. Lorsque du passage d'une onde gravitationnelle, on admet que la longueur du bras d_2 subit une distorsion de sorte que $d_2 = L(1 + h)$

On note δP_{og} la variation de puissance associée au passage de l'onde gravitationnelle de sorte que :

$$P_{og} = P_i + \delta P_{og} \text{ avec } P_i = \frac{P_0}{2} [1 + \cos(k\delta_i)]$$

3.3 Compte-tenu de la faible valeur de l'amplitude h de l'onde gravitationnelle (voir début du sujet) montrer que : $|\delta P_{og}| = P_0 k L h \sin(k\delta_i)$

3.4 Pourquoi est-il important que le faisceau du laser ait une puissance constante ?

Le nombre de photons captés par le détecteur est sujet à une fluctuation intrinsèque appelé bruit de photons. Le bruit de photons est lié à la nature quantique de la lumière. Pour un faisceau recevant N photons pendant une durée Δt , ce nombre N de photons subit une fluctuation typique de l'ordre de \sqrt{N} .

3.5 Proposer une relation simple entre, notamment, N , P et Δt . En déduire que la fluctuation de puissance équivalente δP_{BP} associée au bruit de photons s'écrit $\delta P_{BP} = \sqrt{\frac{h_P \nu P_0 [1 + \cos(k\delta_i)]}{2\Delta t}}$ avec h_P la constante de Planck et ν la fréquence des photons.

3.6 Montrer que l'amplitude minimale d'une onde gravitationnelle susceptible d'être détectée par le dispositif a pour expression : $h_{\min} = \frac{\lambda}{2\pi L} \sqrt{\frac{h_P \nu}{2P_0 \Delta t} \frac{[1 + \cos(k\delta_i)]}{\sin^2(k\delta_i)}}$

3.7 Pour quelle valeur de δ_i la sensibilité est-elle optimale ? On pourra s'aider de la figure 3 donnée en annexe. Montrer que l'on a alors : $h_{\min} = \frac{\lambda}{4\pi L} \sqrt{\frac{h_P \nu}{P_0 \Delta t}}$.

3.8 L'utilisation de dispositifs optiques complémentaires (cavités Fabry-Pérot) permettent d'obtenir une longueur effective L de l'ordre de 100 km. On cherche à détecter des ondes gravitationnelles de fréquence de $f = 1$ kHz. La durée Δt vérifie alors $\Delta t = 1/f$.
Donner une estimation de l'amplitude minimale d'une onde gravitationnelle susceptible d'être détectée par le dispositif.

Le 11 février 2016 la collaboration LIGO a annoncé l'observation directe d'ondes gravitationnelles associées à la collision de deux trous noirs...

Données numériques :

- Constante de gravitation universelle : $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
- Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.
- Constante de Planck : $h_P = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
- Constante de Boltzmann : $k_B = 1,4 \cdot 10^{-23} \cdot \text{J} \cdot \text{K}^{-1}$

Formulaire mathématique :

- $\cos(x + \varepsilon) \approx \cos(x) - \varepsilon \sin(x)$ pour $\varepsilon \ll x$

