CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES **2003**

Corrigé de la seconde épreuve de mathématiques

1. On obtient directement :

$$H = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} = I_3 + 5\,J \text{ avec } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

J est clairement de rang 1, donc 0 est valeur propre double de J, la troisième valeur propre étant égale à 3 puisque $\mathrm{Tr}\,(J) = 3$. Comme $(1,1,1)$ est un vecteur propre évident associé à la valeur propre 3, posons

$$e_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le noyau de J est alors l'orthogonal de e_1. Nous posons donc $e_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_3 = e_1 \wedge e_2 = \dfrac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, pour obtenir $P^{-1}HP = I_3 + 5\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D^2$ avec $P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Comme S est inversible (les valeurs propres de S sont égales à celles de D), on peut poser $U = \Gamma S^{-1}$. Nous avons ensuite ${}^tUU = {}^tS^{-1}{}^t\Gamma\Gamma S^{-1} = S^{-1}HS^{-1} = PD^{-1}P^{-1}PD^2P^{-1}PDP^{-1} = I_3$ et U est bien orthogonale. Il reste à calculer U :

$$U = \Gamma P D^{-1}{}^tP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. On a, pour $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$(A\,|\,B) = \sum_{1 \le i,j \le n} a_{i,j} b_{i,j}.$$

L'application $(\ |\ )$ est donc le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour lequel la base canonique est une base orthonormale.

4. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $M = \dfrac{M + {}^tM}{2} + \dfrac{M - {}^tM}{2}$ avec $\dfrac{M + {}^tM}{2} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\dfrac{M - {}^tM}{2} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Comme $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{0\}$, les deux espaces sont supplémentaires. Ils sont également orthogonaux car, pour $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$,

$$(A\,|\,S) = \mathrm{Tr}\left({}^tAS\right) = -\mathrm{Tr}\,(AS) = -\mathrm{Tr}\,(SA) = -\mathrm{Tr}\left({}^tSA\right) = -(S\,|\,A),$$

et donc $(A\,|\,S) = 0$.

5. Si A est une matrice quelconque, la distance de A à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est égale à la distance de A au projeté orthogonal de A sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, soit encore à la norme du projeté orthogonal de A sur $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, ce qui est exactement le résultat demandé. Par symétrie, on a $d(A, \mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \left|\left|\frac{1}{2}(A + {}^tA)\right|\right|$.

6. On a facilement $\dfrac{\Gamma + {}^t\Gamma}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ puis $d(\Gamma, \mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = 2\sqrt{2}$.

7. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Le théorème de réduction des matrices symétriques permet d'affirmer qu'il existe une matrice orthogonale P telle que $D = PS^tP$ soit diagonale. Pour $X \in \mathbb{R}^n$, nous obtenons donc :

$$ {}^tXSX = {}^t(PX)D(PX) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 $$

en notant λ_i les termes diagonaux de D (i.e. les valeurs propres de S) et y_i les coefficients de la matrice colonne PX. Ainsi, il faut et il suffit que les λ_i soit tous positif pour que S soit positive puisque PX décrit $\mathbb{R}^n$ quand X décrit $\mathbb{R}^n$.

8. La matrice ${}^tAA$ est clairement symérique et ${}^tX({}^tAA)X = {}^t(AX)(AX) = ||AX||^2 \geq 0$ pour tout X (en notant $||\ ||$ la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$). Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ${}^tAA$ est donc symétrique et positive.

9. a) ${}^tA_iA_j$ est le coefficient d'indice (i, j) de la matrice ${}^tAA$: il est donc nul si $i \neq j$ et égal à d_i^2 si $i = j$. En particulier, si $d_i = 0$, $||A_i||^2 = {}^tA_iA_i = d_i^2 = 0$ et la colonne A_i est nulle.

b) Notons I l'ensemble des i tels que $e_i \neq 0$ et, pour chaque $i \in I$, posons $E_i = \frac{A_i}{||A_i||} = \frac{A_i}{d_i}$. La famille $(E_i)_{i \in I}$ est alors une famille orthonormale, que nous pouvons complétée en une base orthonormale $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$. Comme $d_i = 0$ et $A_i = 0$ pour $i \notin I$, l'égalité $A_i = d_iE_i$ est vraie pour tout i.

c) Soit E la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à la base $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$. Cette base étant orthonormale, E est une matrice orthogonale et $A_i = d_iE_i$ pour tout i se traduit par $A = ED$.

10. a) ${}^tAA$ est symétrique réelle, donc il existe P orthogonale telle que $P^{-1t}AAP$ soit diagonale. D'autre part, ${}^tAA$ est positive donc ses valeurs propres sont positives (questions **7** et **8**). On en déduit que $D = P^{-1t}AAP = P^{-1t}BBP$ est une matrice diagonale à termes positifs.

b) On déduit de la question **9c** qu'il existe deux matrices orthogonales E et F telles que $A = ED$ et $B = FD$, ce qui donne $A = UB$ avec $U = EF^{-1}$, qui est bien orthogonale.

11. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme ${}^tAA$ est symétrique positive, il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale positive telle que ${}^tAA = {}^tPD^2P$, que l'on peut écrire ${}^tAA = {}^tSS$ où $S = {}^tPDP$ est symétrique positive. On déduit de la question précédente qu'il existe U orthogonale telle que $A = US$, ce qui est le résultat demandé.

12. Nous avons :

$$ ||\Omega M||^2 = \mathrm{Tr}\left({}^tM\Omega^t\Omega M\right) = \mathrm{Tr}\left({}^tMM\right) = ||M||^2 $$

et en utilisant la propriété classique $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$:

$$ ||M\Omega||^2 = \mathrm{Tr}\left({}^t\Omega^tMM\Omega\right) = \mathrm{Tr}\left({}^tMM\Omega^t\Omega\right) = \mathrm{Tr}\left({}^tMM\right) = ||M||^2, $$

ce qui donne bien $||\Omega M|| = ||M\Omega|| = ||M||$.

13. a) On a $||A - \Omega|| = ||US - \Omega|| = ||U(S - U^{-1}\Omega)|| = ||S - U^{-1}\Omega||$ d'après la question **12**.

Quand Ω décrit $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $U^{-1}\Omega$ décrit également $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, donc $d(A, \mathrm{O}_n(\mathbb{R})) = d(S, \mathrm{O}_n(\mathbb{R}))$.

b) Pour tout $\Omega \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, nous avons $||S - \Omega|| = ||PDP^{-1} - \Omega|| = ||P(D - P^{-1}\Omega P)P^{-1}|| = ||D - P^{-1}\Omega P||$ car $P, P^{-1} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Une nouvelle fois, $P^{-1}\Omega P$ décrit $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ quand Ω décrit $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ donc

$$d(A, \mathrm{O}_n(\mathbb{R})) = d(S, \mathrm{O}_n(\mathbb{R})) = d(D, \mathrm{O}_n(\mathbb{R})).$$

14. a) $||D - \Omega||^2 = \mathrm{Tr}\left({}^t(D - \Omega)(D - \Omega)\right) = \mathrm{Tr}\left(D^2 - {}^t\Omega D - D{}^t\Omega + I_n\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 - 2\mathrm{Tr}\,(D\Omega) + n$.

b) En notant $d_{i,j}$ et $\omega_{i,j}$ les termes génériques de D et de Ω, nous obtenons :

$$\mathrm{Tr}\,(D\Omega) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n d_{i,k}\omega_{k,i} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \omega_{i,i} \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

car Ω étant orthogonale, les $\omega_{i,j}$ sont éléments de $[-1, 1]$

c) On en déduit que pour tout $\Omega \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$:

$$||D - \Omega||^2 \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 - 2\sum_{i=1}^n \lambda_i + n = \sum_{i=1}^n (\lambda_i - 1)^2 = ||D - I_n||^2.$$

Comme $I_n \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, ceci prouve que la distance de D à $\Omega \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est minimale pour $\Omega = I_n$.

15. Nous venons de démontrer que $d(A, \mathrm{O}_n(\mathbb{R})) = d(D, \mathrm{O}_n(\mathbb{R})) = d(D, I_n) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\lambda_i - 1)^2}$, où les λ_i sont les racines carrées des valeurs propres de ${}^tAA$, appelées *valeurs singulières* de A.

16. Nous avons ici $n = 3$, $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, donc $d(\Gamma, \mathrm{O}_n(\mathbb{R})) = 3$.

17. a) Soit α le minimum de l'ensemble des $|\lambda|$ pour λ valeur propre (réelle) non nulle de M (si M n'a aucune valeur propre réelle non nulle, on choisit $\alpha > 0$ quelconque). Pour tout $\lambda \in]0, \alpha[$, $M - \lambda I_n$ est inversible car λ n'est pas valeur propre de M.

b) Pour M quelconque et α comme au a, la suite $\left(M - \dfrac{\alpha}{k+2} I_n\right)_{k \geq 0}$ est une suite de matrices inversibles qui converge vers M : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est donc dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

18. On en déduit que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $d(A, \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})) = 0$. Comme $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est contenu dans tous les Δ_p pour $p \leq n$, on a à plus forte raison $d(A, \Delta_p) = 0$ pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout $p \leq n$.

19. Si nous notons q la forme quadratique admettant A pour matrice dans la base canonique, nous savons que la matrice de q dans la base $(C_1, C_2, \ldots, C_n)$ est égale à ${}^tPAP$, i.e. à D. Nous en déduisons que ${}^tXAX = q(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$.

D'autre part, la base $(C_1, C_2, \ldots, C_n)$ est orthonormale pour le produit scalaire usuel, donc ${}^tXX = ||X||^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$.

En particulier, pour $X = C_k$, nous obtenons :

$$\frac{{}^tC_k A C_k}{{}^tC_k C_k} = \lambda_k.$$

20. Soit X élément non nul de F_k. Avec les notations de la question **19**, nous avons $x_i = 0$ pour $i > k$, ce qui donne :

$$\frac{{}^tXAX}{{}^tXX} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{k} x_i^2} \geq \frac{\sum_{i=1}^{k} \lambda_k x_i^2}{\sum_{i=1}^{k} x_i^2} = \lambda_k$$

car les λ_i décroissent. Comme le minorant λ_k est atteint pour $X = C_k$, on en déduit :

$$\min_{X \in F_k \setminus \{O\}} \frac{{}^tXAX}{{}^tXX} = \lambda_k.$$

21. a) On sait que $\dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cup G)$ pour F et G s.e.v. de E, donc

$$\dim(F \cap \mathrm{Vect}(C_k, C_{k+1}, \ldots, C_n)) = k + (n-k+1) - \dim(F \cup \mathrm{Vect}(C_k, C_{k+1}, \ldots, C_n)) \geq 1$$

car $\dim(F \cup \mathrm{Vect}(C_k, C_{k+1}, \ldots, C_n)) \leq n$.

b) En reprenant encore les notations de la question **19**, nous avons :

$$\frac{{}^tXAX}{{}^tXX} = \frac{\sum_{i=k}^{n} \lambda_i x_i^2}{\sum_{i=k}^{n} x_i^2} \leq \frac{\sum_{i=k}^{n} \lambda_k x_i^2}{\sum_{i=1}^{k} x_i^2} = \lambda_k$$

car les λ_i décroissent.

22. En utilisant la question **20**, nous obtenons :

$$\max_{F \in \Psi_k} \min_{X \in F \setminus \{O\}} \frac{{}^tXAX}{{}^tXX} \geq \min_{X \in F_k \setminus \{O\}} \frac{{}^tXAX}{{}^tXX} = \lambda_k.$$

D'autre part, pour $F \in \Psi_k$, on peut choisir X_0 non nul dans $F \cap \mathrm{Vect}(C_k, C_{k+1}, \ldots, C_n)$ puisque cet espace vectoriel est de dimension non nulle. On en déduit :

$$\min_{X \in F_k \setminus \{O\}} \frac{{}^tXAX}{{}^tXX} \leq \frac{{}^tX_0AX_0}{{}^tX_0X_0} \leq \lambda_k.$$

Ceci achève la preuve du théorème de Courant et Fischer.

23. Soit P orthogonale et D diagonale positive telles que ${}^tAA = {}^tPD^2P$. On a alors ${}^t(A{}^tP)(A{}^tP) = D^2$, donc (question **9**) il existe $E \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $A{}^tP = ED$, ce qui donne bien $A = EDP$ avec $E, P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale positive.

On en déduit que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(D) = \mathrm{rg}\left(D^2\right) = \mathrm{rg}({}^tAA)$ puisque A est équivalente à D, D est diagonale et D^2 est semblable à ${}^tAA$.

Remarque : il est plus rapide de montrer (classiquement) que A et ${}^tAA$ ont même noyau.

24. Posons $R_l = M_lP$ pour l compris entre 1 et n. On a ainsi $A = EDP = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\mu_l}\ R_l = \sum_{i=1}^{r} \sqrt{\mu_l}\ R_l$ et on vérifie facilement que (R_l) est orthonormale :

$$(R_l \mid R_k) = \mathrm{Tr}\left({}^tP{}^tM_lM_kP\right) = \mathrm{Tr}\left({}^tM_lM_kP{}^tP\right) = \mathrm{Tr}\left({}^tM_lM_k\right)$$

or ${}^t M_l M_k$ a tous ses termes nuls, sauf peut-être celui d'indice (l,k) qui est égal au produit scalaire des l-ième et k-ième colonnes de E. Comme E est orthogonale, on obtient bien $(R_l, R_k) = 0$ si $l \neq k$ et $(R_l, R_k) = 1$ si $l = k$.

Enfin, chaque R_l est de rang 1 car $\mathrm{rg}\,(R_l) = \mathrm{rg}\,(M_l) = 1$ (P est inversible et M_l a une et une seule colonne non nulle).

25. On a clairement $\mathrm{Im}\,(N) \subset \mathrm{Im}\,(R_1) + \mathrm{Im}\,(R_2) + \cdots + \mathrm{Im}\,(R_p)$, puis $\mathrm{rg}\,(N) \leq p$ (les $\mathrm{Im}\,(R_i)$ sont des droites).

Comme $N \in \nabla_p$, $d(A, \nabla_p) \leq d(A, N) = \left\| \sum_{l=p+1}^{r} \sqrt{\mu_i}\ R_i \right\| = \sqrt{\sum_{l=p+1}^{r} \mu_i}$ car (R_i) est une famille orthonormale.

26. a) $\dim(G) = \dim(\mathrm{Ker}\,(M)) + \dim(\mathrm{Im}\,({}^t AA)) - \dim(\mathrm{Ker}\,(M) \cup \mathrm{Im}\,({}^t AA)) \geq (n-p) + r - n = r - p$.

b) En appliquant le théorème de Courant et Fischer (plus exactement en appliquant la question **21**) à la matrice $A - M$, nous obtenons :

$$\alpha_k \geq \min_{X \in F \setminus \{0\}} \frac{{}^t X {}^t (A-M)(A-M)X}{{}^t XX}$$

mais pour $X \in F$, $MX = 0$ et ${}^t X {}^t M = 0$, donc

$$\alpha_k \geq \min_{X \in F \setminus \{0\}} \frac{{}^t X {}^t AAX}{{}^t XX}.$$

c) On a $G \cap \mathrm{Vect}\,(V_1, \ldots, V_{k+p}) = \mathrm{Ker}\,(M) \cap \mathrm{Vect}\,(V_1, \ldots, V_{k+p})$ car $\mathrm{Vect}\,(V_1, \ldots, V_{k+p}) \subset \mathrm{Vect}\,(V_1, \ldots, V_r) = \mathrm{Im}\,({}^t AA)$ (on a $k \leq r - p$). On en déduit donc (comme au **a**) que $G \cap \mathrm{Vect}\,(V_1, \ldots, V_{k+p})$ est de dimension au moins $(k+p) + (n-p) - n = k$.

d) Comme $G \cap \mathrm{Vect}\,(V_1, \ldots, V_{k+p})$ est de dimension au moins égale à k, on peut choisir un sous-espace F de dimension k contenu dans $G \cap \mathrm{Vect}\,(V_1, \ldots, V_{k+p})$. Nous avons alors :

- $\alpha_k \geq \min_{X \in F \setminus \{O\}} \dfrac{{}^t X {}^t AAX}{{}^t XX}$ d'après le **b** ;
- pour X élément quelconque de F, que l'on peut écrire sous la forme $X = \sum_{i=1}^{k+p} x_i V_i$:

$$\frac{{}^t X {}^t AAX}{{}^t XX} = \frac{\sum_{i=1}^{k+p} \mu_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{k+p} x_i^2} \geq \mu_{k+p}$$

  car les μ_i décroissent.

On en déduit l'inégalité demandée : $\alpha_k \geq \mu_{k+p}$.

27. Soit M une matrice de rang $q \leq p < r$. En reprenant les notations et les résultats de la question **26**, et en remplaçant p par q (l'inégalité obtenue fonctionne aussi quand $q = 0$), nous obtenons :

$$d^2(A, M) = \mathrm{Tr}\left({}^t(A-M)(A+M)\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \geq \sum_{i=1}^{r-q} \alpha_i \geq \sum_{i=1}^{r-q} \mu_{i+q} = \sum_{i=q+1}^{r} \mu_i \geq \sum_{i=p+1}^{r} \mu_i.$$

On en déduit que $d(A,\nabla_p) \geq \sum_{i=p+1}^{r} \mu_i$, ce qui donne, avec la question **25** :

$$d(A,\nabla_p) = \sqrt{\sum_{l=p+1}^{r} \mu_i}$$

où les μ_i sont les valeurs propres (décroissantes) de ${}^tAA$.

28. Ici, nous avons $\mu_1 = 16$, $\mu_2 = \mu_3 = 1$ et $r = 3$. Nous en déduisons donc :

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= ||\Gamma|| = 3\sqrt{2} \\
\gamma_1 &= \sqrt{2} \\
\gamma_2 &= 1 \\
\gamma_3 &= d(\Gamma,\Gamma) = 0.
\end{aligned}$$