

□

Calculs de distances entre une matrice et certaines parties de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Notations

Dans ce sujet, n est un entier naturel non nul et on note :

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: la \mathbb{R} -algèbre des matrices carrées réelles d'ordre n .

$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: le \mathbb{R} -espace vectoriel des matrices à n lignes et à une colonne.

Pour une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, tA est sa matrice transposée, $\text{rang}(A)$ son rang et $\text{Tr}(A)$ sa trace.

I_n : la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$: le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$: le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$: l'ensemble des matrices positives de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ c'est-à-dire des matrices A de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : pour toute matrice $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX \geq 0$.

$GL_n(\mathbb{R})$: le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$: le groupe des matrices réelles orthogonales c'est-à-dire des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : ${}^tMM = I_n$.

Pour p entier naturel, Δ_p est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang supérieur ou égal à p et ∇_p est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang inférieur ou égal à p .

Objectifs

Le but du sujet est de calculer la distance (par la norme de Schur définie à la question II.3.) d'une matrice à :

dans la partie II., $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ par le théorème de projection orthogonale,

dans la partie III., $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ par le théorème de décomposition polaire,

dans la partie IV., Δ_p par des notions de densité,

dans la partie V., ∇_p par le théorème de Courant et Fischer.

La partie I. traite un exemple qui sera utilisé dans les différentes parties.

Remarque : dans le texte, le mot "positif" signifie "supérieur ou égal à 0".

I. Exercice préliminaire

1. Soit la matrice $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on pose $H = {}^t\Gamma\Gamma$. Diagonaliser la matrice H et déterminer une matrice P de $\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D à termes tous positifs telles que $D^2 = P^{-1}HP$.

2. On pose $S = PDP^{-1} \in \mathcal{S}_3^+(\mathbb{R})$, montrer que la relation $\Gamma = US$ définit une matrice $U \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ et calculer cette matrice.

II. Calcul de la distance de A à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

3. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $(A|B) = \text{Tr}({}^tAB)$.

Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

La norme associée à ce produit scalaire (norme de Schur) est notée : $\|A\| = ((A|A))^{\frac{1}{2}}$. Dans tout le sujet, si Π est une partie non vide de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la distance d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à la partie Π est le réel $d(A, \Pi) = \inf_{M \in \Pi} \|A - M\|$.

4. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et que cette somme directe est orthogonale.

5. Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \|\frac{1}{2}(A - {}^tA)\|$ et déterminer de même $d(A, \mathcal{A}_n(\mathbb{R}))$.

6. Calculer $d(\Gamma, \mathcal{A}_3(\mathbb{R}))$ où Γ est la matrice exemple de la partie I.

III. Calcul de la distance de A à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

A. Théorème de la décomposition polaire

7. Montrer qu'une matrice S de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ appartient à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si toutes les valeurs propres de S sont positives ou nulles.

8. Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que la matrice ${}^tAA \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

9. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on suppose qu'il existe une matrice diagonale $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ à termes positifs telle que ${}^tAA = D^2$.

On note A_1, A_2, \dots, A_n les matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui forment les colonnes de la matrice A .

a. Pour tout couple (i, j) d'entiers naturels compris entre 1 et n , évaluer tA_iA_j . En particulier, si i est un entier pour lequel $d_i = 0$, que vaut A_i ?

b. Montrer que l'on peut trouver une base orthonormée (E_1, E_2, \dots, E_n) de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (par rapport au produit scalaire canonique $\langle X, Y \rangle = {}^tXY$, de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) telle que, pour tout entier naturel i entre 1 et n , $A_i = d_iE_i$.

c. En déduire qu'il existe une matrice E de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = ED$.

10. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^tAA = {}^tBB$.

a. Montrer qu'il existe une matrice diagonale D à termes positifs et une matrice orthogonale P telles que : $P^{-1}{}^tAAP = P^{-1}{}^tBBP = D^2$.

b. Montrer qu'il existe une matrice U de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = UB$.

11. Déduire des questions précédentes le théorème de décomposition polaire : Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice U de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice S de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A = US$. (Remarque : on peut également établir l'unicité de la matrice S de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et même l'unicité de la matrice U de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ si A est de plus inversible dans cette décomposition mais ce ne sera pas utile pour la suite du problème).

B. Calcul de $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$

12. Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour toute matrice Ω de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\|M\Omega\| = \|\Omega M\| = \|M\|$.

13. Dans la suite de cette partie, soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A = US$; il existe une matrice diagonale D et une matrice P de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $S = PDP^{-1}$.

a. Montrer que, pour toute matrice Ω de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\|A - \Omega\| = \|S - U^{-1}\Omega\|$ et en déduire que, $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = d(S, \mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$.

b. Montrer que, $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = d(D, \mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$

14. On note $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$

a. Montrer que pour toute matrice Ω de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\|D - \Omega\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 - 2\text{Tr}(D\Omega) + n$

b. Montrer que pour toute matrice Ω de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\text{Tr}(D\Omega) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

c. Conclure que $d(D, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \|D - I_n\|$.

15. Montrer que, $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \|A - U\|$.

16. Calculer $d(\Gamma, \mathcal{O}_3(\mathbb{R}))$ où Γ est la matrice exemple de la partie I.

IV. Calcul de la distance de A à Δ_p .

17. Un résultat de densité.

a. Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout réel λ vérifiant $0 < \lambda < \alpha$, la matrice $M - \lambda I_n$ est inversible.

b. En déduire que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

18. Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, déterminer, pour tout entier naturel $p \leq n$, $d(A, \Delta_p)$.

V. Calcul de la distance de A à ∇_p .

A. Théorème de Courant et Fischer

Soit A une matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On notera $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ ses valeurs propres, on notera $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, P la matrice de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A = PD^tP$ et C_1, C_2, \dots, C_n les matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formant les colonnes de la matrice P .

Si k est un entier entre 1 et n , on note Ψ_k l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de dimension k . Nous allons montrer que :

$$\lambda_k = \max_{F \in \Psi_k} \min_{X \in F - \{0\}} \frac{{}^tXAX}{{}^tXX}. \quad (\text{théorème de Courant et Fischer}).$$

19. Soit X un vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de coordonnées (x_1, x_2, \dots, x_n) dans la base orthonormée (C_1, C_2, \dots, C_n) de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Calculer en fonction des x_i et λ_i . (i compris entre 1 et n) : tXAX et tXX et pour k entier entre 1 et n , $\frac{{}^tC_kAC_k}{{}^tC_kC_k}$.

20. Soit k entier entre 1 et n , on pose $F_k = \text{vect}\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$. Montrer que pour tout X non nul de F_k , $\frac{{}^tXAX}{{}^tXX} \geq \lambda_k$

et déterminer $\min_{X \in F_k - \{0\}} \frac{{}^tXAX}{{}^tXX}$.

21. Soit $F \in \Psi_k$

a. montrer que $\dim(F \cap \text{vect}\{C_k, C_{k+1}, \dots, C_n\}) \geq 1$.

b. Si X est un vecteur non nul de $F \cap \text{vect}\{C_k, C_{k+1}, \dots, C_n\}$, montrer que $\frac{{}^tXAX}{{}^tXX} \leq \lambda_k$.

22. Conclure.

B. Calcul de $d(A, \nabla_p)$

Dans toute cette partie : A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang r et p est un entier naturel, $p < r$.

23. Montrer qu'il existe deux matrices E et P de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D à termes positifs telles que $A = EDP$. En déduire que le rang de la matrice tAA est encore r . (On pourra utiliser les résultats de la question 9.)

24. Si on note les valeurs propres de la matrice symétrique réelle tAA de rang r : $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_r > 0$ et $\mu_{r+1} = \dots = \mu_n = 0$, si on pose $D = \text{diag}(\sqrt{\mu_1}, \sqrt{\mu_2}, \dots, \sqrt{\mu_r}, 0, \dots, 0)$, si pour $1 \leq l \leq n$ on note M_l la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la l -ième colonne est celle de la matrice $E \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ de la question 23., tous les autres termes de M_l étant nuls, on a clairement : $ED = \sum_{l=1}^n \sqrt{\mu_l} M_l$.

Montrer alors qu'il existe une famille orthonormale (R_1, R_2, \dots, R_n) de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (pour le produit scalaire $(A|B) = \text{Tr}({}^tAB)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$), toutes de rang un, et telles que $A = \sum_{l=1}^n \sqrt{\mu_l} R_l = \sum_{l=1}^r \sqrt{\mu_l} R_l$.

25. Avec les notations de la question 24., on pose $N = \sum_{l=1}^p \sqrt{\mu_l} R_l$.

Montrer que $\text{rang}(N) \leq p$ puis que $d(A, \nabla_p) \leq \sqrt{\mu_{p+1} + \dots + \mu_r}$.

26. Soit M une matrice de rang p ($p < r$), on note $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n \geq 0$ les valeurs propres de la matrice ${}^t(A-M)(A-M)$ et on pose $G = \text{Ker}M \cap \text{Im}({}^tAA)$.

Soit k un entier compris entre 1 et $r - p$.

- a. Montrer que $\dim G \geq r - p$.
- b. Soit F un sous-espace vectoriel de G de dimension k , montrer que : $\alpha_k \geq \min_{X \in F - \{0\}} \frac{{}^t X {}^t A A X}{{}^t X X}$.
- c. On note (V_1, V_2, \dots, V_n) une base de \mathbb{R}^n formée de vecteurs propres de la matrice ${}^t A A$, le vecteur V_i étant associé à la valeur propre μ_i de telle sorte que : $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_r > 0$ et $\mu_{r+1} = \dots = \mu_n = 0$.
Montrer que $\dim(G \cap \text{vect}\{V_1, V_2, \dots, V_{k+p}\}) \geq k$.
- d. En déduire que $\alpha_k \geq \mu_{k+p}$.

27. En déduire $d(A, \nabla_p)$.

28. Calculer, pour $p \in \{0, 1, 2, 3\}$, $\gamma_p = d(\Gamma, \nabla_p)$ où Γ est la matrice exemple de la partie I.