Concours Communs INP 2019

Épreuve de mathématiques, PSI, quatre heures

Corrigé

Problème 1

Partie I – Deux exemples de fonctions indéfiniment dérivables

Q1. Il s'agit de justifier, pour tout $x \in \mathbf{R}$, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t(1-itx)}\mathrm{d}t$.

Soit $x \in \mathbf{R}$. L'application $t \mapsto e^{-t(1-itx)}$ est continue sur $\mathbf{R}_+$, en tant que composition de l'application polynomiale $t \mapsto -t(1-itx)$, continue sur $\mathbf{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbf{C}$, et de l'application exponentielle, continue sur $\mathbf{C}$ en tant que somme de série entière de rayon de convergence infini. Elle est donc intégrable sur tout segment inclus dans $\mathbf{R}_+$, et le problème d'intégrabilité ne se pose qu'au voisinage de $+\infty$.

Pour tout nombre réel t on a : $\left|t^2 e^{-t(1-itx)}\right| = t^2 e^{-t}$ et donc, par croissances comparées :

$$\lim_{t \to +\infty} t^2 \left|e^{-t(1-itx)}\right| = 0.$$

On en déduit : $\left|e^{-t(1-itx)}\right| \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Or la fonction de Riemann $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, puisque son exposant 2 est strictement supérieur à 1, donc par comparaison on en déduit que l'application $t \mapsto e^{-t(1-itx)}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$.

Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t(1-itx)}\mathrm{d}t$ converge absolument, donc converge, et on en déduit que $f(x)$ existe pour tout $x \in \mathbf{R}$. Ainsi f est bien définie sur $\mathbf{R}$.

Q2. Soit $p \in \mathbf{N}$. L'application $t \mapsto t^p e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$, donc intégrable sur tout segment inclus dans $[0, +\infty[$: le seul problème éventuel d'intégrabilité est au voisinage de $+\infty$. La fonction étant positive, on peut procéder par relation de comparaison. Or on a, d'après le théorème des croissances comparées : $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} t^2 \cdot t^p e^{-t} = 0$. On en déduit :

$$t^p e^{-t} \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

La fonction de Riemann $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ parce que son exposant 2 est strictement supérieur à 1, donc l'application $t \mapsto t^p e^{-t}$ est également intégrable au voisinage de $+\infty$ d'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives.

On en déduit que l'application $t \mapsto t^p e^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, donc $\Gamma_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^p e^{-t}\mathrm{d}t$ est une intégrale convergente.

Donnons à présent une relation entre Γ_{p+1} et Γ_p : passer de t^{p+1} à t^p dans l'intégrande se fait en intégrant par parties. Soit, donc, a un réel positif ; l'application $t \mapsto e^{-t}$ est continue sur $[0, a]$ et l'application $t \mapsto t^{p+1}$ est de classe C^1 sur ce même segment. On intègre la première et on dérive la seconde ; d'après la formule de l'intégration par parties, on a donc :

$$\int_0^a t^{p+1}e^{-t}\mathrm{d}t = \left[-t^{p+1}e^{-t}\right]_0^a - \int_0^a(-e^{-t})(p+1)t^p\mathrm{d}t = -a^{p+1}e^{-a} + (p+1)\int_0^a e^{-t}t^p\mathrm{d}t.$$

Or : $\lim\limits_{a\to+\infty} a^{p+1}e^{-a} = 0$ d'après le théorème des croissances comparées. On en déduit, quand $a \to +\infty$ dans l'égalité ci-dessus :

$$\int_0^{+\infty} t^{p+1}e^{-t}\mathrm{d}t = (p+1)\int_0^{+\infty} t^p e^{-t}\mathrm{d}t,$$

c'est-à-dire :

$$\Gamma_{p+1} = (p+1)\Gamma_p.$$

Q3. On a immédiatement : $\Gamma_0 = \int_0^{+\infty} e^{-u}\mathrm{d}u = \left[-e^{-u}\right]_0^{+\infty} = 1$. Voyons comment, par récurrence sur $p \in \mathbf{N}$, on en déduit l'égalité : $\Gamma_p = p!$. Si $p = 0$, cela vient d'être établi, vu que $0! = 1$ et $\Gamma_0 = 1$. Soit $p \in \mathbf{N}$, et supposons que $\Gamma_p = p!$. Alors, d'après l'égalité démontrée ci-dessus :

$$\Gamma_{p+1} = (p+1)\Gamma_p = (p+1)p! = (p+1)!,$$

donc l'égalité voulue est héréditaire. Nous l'avons initialisée, donc par principe de récurrence :

$$\forall p \in \mathbf{N}, \quad \Gamma_p = p!.$$

Q4. Nous allons montrer que f est de classe C^p pour tout $p \in \mathbf{N}$, à l'aide du théorème de régularité C^p des intégrales à paramètre. Posons :

$$\forall (x,t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+, \quad g(x,t) = e^{-t(1-itx)} = e^{-t}e^{it^2x}.$$

Alors :

— pour tout tout $p \in \mathbf{N}$ et tout $t \in \mathbf{R}_+$, l'application $x \mapsto g(x,t)$ est de classe C^p sur $\mathbf{R}$, puisqu'elle s'obtient en composant une application polynomiale et l'exponentielle complexe, et on a :

$$\forall t \in \mathbf{R}_+,\ \forall p \in \mathbf{N},\ \forall x \in \mathbf{R}, \quad \frac{\mathrm{d}^p g}{\mathrm{d}x^p}(x,t) = \left(it^2\right)^p e^{-t}e^{it^2x};$$

— pour tout $p \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}$, l'application $t \mapsto \dfrac{\mathrm{d}^p g}{\mathrm{d}x^p}(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbf{R}_+$ par un argument analogue à celui ci-dessus ;

— pour tout $p \in \mathbf{N}$ et tout $(x,t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$, on a :

$$\left|\frac{\mathrm{d}^p g}{\mathrm{d}x^p}(x,t)\right| = t^{2p}e^{-t};$$

et l'application $t \mapsto t^{2p}e^{-t}\mathrm{d}t$ est intégrable sur $\mathbf{R}_+$ d'après la question **Q2**, ce qui démontre à la fois, pour tout $x \in \mathbf{R}$, l'intégrabilité de $t \mapsto \dfrac{\mathrm{d}^p g}{\mathrm{d}x^p}(x,t)$ sur $\mathbf{R}_+$ pour tout $p \in \mathbf{N}$, et l'hypothèse de domination.

On en déduit, d'après le théorème de régularité C^p des intégrales à paramètre, que f est de classe C^p sur $\mathbf{R}$ pour tout $p \in \mathbf{N}$, indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}$, et on a :

$$\forall p \in \mathbf{N},\ \forall x \in \mathbf{R}, \quad f^{(p)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}^p g}{\mathrm{d}x^p}(x,t)\mathrm{d}t = i^p \int_0^{+\infty} t^{2p}e^{-t(1-itx)}\mathrm{d}t.$$

Q5. D'après la question précédente, on a :

$$\forall p \in \mathbf{N}, \quad \frac{f^{(p)}(0)}{p!} = \frac{i^p}{p!}\int_0^{+\infty} t^{2p}e^{-t}\mathrm{d}t = \frac{i^p}{p!}\Gamma_{2p} = i^p\frac{(2p)!}{p!}.$$

Ce terme n'est jamais nul et on a, pour tout x non nul et p au voisinage de l'infini :

$$\frac{\left|\dfrac{f^{(p+1)}(0)}{(p+1)!}x^{p+1}\right|}{\left|\dfrac{f^{(p)}(0)}{p!}x^p\right|} = \frac{(2(p+1))!}{(p+1)!} \times \frac{p!}{(2p)!}|x| = \frac{(2p+2)(2p+1)}{p+1}|x| \underset{p\to+\infty}{\sim} 4p|x| \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

donc, pour tout $x \in \mathbf{R}$ non nul la série $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0} \frac{f^{(p)}(0)}{p!}x^p$ diverge grossièrement d'après la règle de D'Alembert. On en déduit que le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0} \frac{f^{(p)}(0)}{p!}x^p$ est nul.

Si f est développable en série entière en 0, alors f est égale à sa série de Taylor dans un voisinage de 0 ; or sa série de Taylor diverge en tout réel non nul d'après ce qui précède, donc c'est impossible. On en déduit que f n'est pas développable en série entière en 0.

Q6. Nous allons vérifier que g est de classe C^p sur $\mathbf{R}$ pour tout $p \in \mathbf{N}$ grâce au théorème de dérivation terme à terme, démontrant au passage l'existence de la somme qui définit g. Posons :

$$\forall k \in \mathbf{N},\ \forall x \in \mathbf{R}, \quad g_k(x) = e^{-k(1-ikx)}.$$

Pour tout $k \in \mathbf{N}$, l'application g_k est manifestement de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$: à multiplication près par la constante e^{-k}, elle s'obtient en composant l'application polynomiale $x \mapsto k^2x$, de classe C^∞

sur $\mathbf{R}$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$, avec l'exponentielle complexe $x \mapsto e^{ix}$, de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ parce que sa partie réelle (le cosinus) et sa partie imaginaire (le sinus) le sont. On a de plus :

$$\forall k \in \mathbf{N},\ \forall p \in \mathbf{N},\ \forall x \in \mathbf{R}, \quad g_k^{(p)}(x) = (ik^2)^p e^{-k} e^{ik^2 x},$$

avec la convention ici que pour $p = k = 0$, on a : $k^{2p} = 1$.
Pour tout $p \in \mathbf{N}$, étudions le mode de convergence de la série de fonctions $\sum\limits_{k \geqslant 0} g_k$: pour tout $p \in \mathbf{N}$, tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}$, on a : $|g_k^{(p)}(x)| = k^{2p} e^{-k}$. On en déduit :

$$\forall p \in \mathbf{N},\ \forall k \in \mathbf{N}, \quad \|g_k^{(p)}\|_\infty = k^{2p} e^{-k}.$$

Montrons que pour tout $p \in \mathbf{N}$, la série $\sum\limits_{k \geqslant 0} \|g_k^{(p)}\|_\infty = \sum\limits_{k \geqslant 0} k^{2p} e^{-k}$ converge : elle est à termes positifs, et on montre comme aux questions **Q1** et **Q2** que $k^{2p} e^{-k} \underset{k \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{k^2}\right)$, grâce au théorème des croissances comparées. Or la série de Riemann $\sum\limits_{k \geqslant 1} \dfrac{1}{k^2}$ converge parce que son exposant 2 est strictement supérieur à 1. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum\limits_{k \geqslant 0} k^{2p} e^{-k}$ converge pour tout $p \in \mathbf{N}$.
Ainsi, pour tout $p \in \mathbf{N}$ la série $\sum\limits_{k \geqslant 0} g_k^{(p)}$ converge normalement, donc uniformément (et simplement) sur $\mathbf{R}$. D'après le théorème de dérivation terme à terme, on en déduit que $g = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} g$ est de classe C^p pour tout $p \in \mathbf{N}$, donc de classe C^∞, et on a :

$$\forall p \in \mathbf{N},\ \forall x \in \mathbf{N}, \quad g^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k^{(p)}(x) = i^p \sum_{k=0}^{+\infty} k^{2p} e^{-k} e^{ik^2 x}.$$

Q7. Soit $p \in \mathbf{N}$. D'après la question précédente :

$$\left|g^{(p)}(0)\right| = \left| i^p \sum_{k=0}^{+\infty} k^{2p} e^{-k} \right| = |i|^p \left| \sum_{k=0}^{+\infty} k^{2p} e^{-k} \right|.$$

Or $|i| = 1$, et la somme est positive, donc :

$$\left|g^{(p)}(0)\right| = \sum_{k=0}^{+\infty} k^{2p} e^{-k} = p^{2p} e^{-p} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq p}}^{+\infty} \underbrace{k^{2p} e^{-k}}_{\geqslant 0} \geqslant p^{2p} e^{-p},$$

d'où le résultat.

Q8. Montrons que la série entière $\sum_{p\geqslant 0} \frac{p^{2p}e^{-p}}{p!}x^p$ est de rayon de convergence nul. Pour tout réel x non nul, et pour tout p au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\frac{\left|\frac{(p+1)^{2(p+1)}e^{-(p+1)}}{(p+1)!}x^{p+1}\right|}{\left|\frac{p^{2p}e^{-p}}{p!}x^p\right|} = \left(1+\frac{1}{p}\right)^{2p}(p+1)e^{-1}|x| \geqslant pe^{-1}|x| \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

donc, pour tout $x \in \mathbf{R}$ non nul : $\lim\limits_{p\to+\infty} \frac{\left|\frac{(p+1)^{2(p+1)}e^{-(p+1)}}{(p+1)!}x^{p+1}\right|}{\left|\frac{p^{2p}e^{-p}}{p!}x^p\right|} = +\infty$. D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{p\geqslant 0} \frac{p^{2p}e^{-p}}{p!}x^p$ diverge donc grossièrement pour tout x non nul, donc la série entière $\sum_{p\geqslant 0} \frac{p^{2p}e^{-p}}{p!}x^p$ est de rayon de convergence nul.

Or : $\forall p \in \mathbf{N}$, $\left|\frac{g^{(p)}(0)}{p!}\right| \geqslant \frac{p^{2p}e^{-p}}{p!}$. Donc, d'après le théorème de comparaison des séries entières, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{p\geqslant 0} \frac{g^{(p)}(0)}{p!}x^p$ est inférieur ou égal à 0, donc est nul.

Par le même argument que dans la question **Q5**, on en déduit que g n'est pas développable en série entière en 0.

Partie II – Le théorème de Borel

Q9. On a : $X^2+1 = (X+i)(X-i)$. La décomposition en éléments simples assure l'existence de deux nombres complexes a et b tels que pour tout $x \in \mathbf{C}$ différent de i et $-i$:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{a}{x-i} + \frac{b}{x+i}.$$

Pour les déterminer, notons que si l'on multiplie cette égalité par $x-i$, et qu'on pose $x=i$, on obtient :

$$\frac{1}{2i} = a,$$

et de même, en multipliant cette égalité par $x+i$ et en posant $x=-i$, on obtient $b = -\frac{1}{2i}$. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right).$$

Q10. Tout d'abord, ψ est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$, en tant qu'inverse d'une application polynomiale qui ne s'annule pas sur $\mathbf{R}$. On doit montrer par récurrence que pour tout $p \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}$:

$$\psi^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p p!}{(x-i)^{p+1}}.$$

Pour cela, notons qu'il s'agit d'une évidence si $p = 0$, par définition de ψ. À présent, soit $p \in \mathbf{N}$, et supposons que cette égalité soit vraie pour tout $x \in \mathbf{R}$. Alors, en la dérivant, on obtient :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \psi^{(p+1)}(x) = \left(\psi^{(p)}\right)'(x) = (-1)^p p! \times \left(-\frac{p+1}{(x-i)^{p+2}}\right) = (-1)^{p+1}(p+1)! \times \frac{1}{(x-i)^{p+1+1}},$$

d'où l'hérédité de cette l'égalité. Elle est donc vraie pour tout $p \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}$ par principe de récurrence.

Q11. Un raisonnement analogue à celui de la question précédente permet de montrer que pour tout $p \in \mathbf{N}$, la dérivée p-ième de $x \mapsto \dfrac{1}{x+i}$ est $x \mapsto \dfrac{(-1)^p p!}{(x+i)^{p+1}}$. Or, d'après la question **Q9**, on a :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \varphi_1(x) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right),$$

donc, pour tout $p \in \mathbf{N}$, on a :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \varphi_1^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p p!}{2i}\left(\frac{1}{(x-i)^{p+1}} - \frac{1}{(x+i)^{p+1}}\right) = \frac{(-1)^p p!}{2i} \times \frac{(x+i)^{p+1} - (x-i)^{p+1}}{(x^2+1)^{p+1}}.$$

Q12. Soient $p \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}$. Alors :

$$|(x+i)^{p+1} - (x-i)^{p-1}| = \left|2i\mathrm{Im}\left((x+i)^{p+1}\right)\right| \leqslant 2\left|(x+i)^{p+1}\right| = 2|x+i|^{p+1} = 2\left(\sqrt{x^2+1}\right)^{p+1},$$

d'où le résultat demandé en écrivant : $\left(\sqrt{x^2+1}\right)^{p+1} = (x^2+1)^{\frac{p+1}{2}}$.

En utilisant l'expression de $\varphi^{(p)}(x)$ trouvée dans la question précédente, on en déduit :

$$\left|\varphi_1^{(p)}(x)\right| = \frac{p!}{2} \times \frac{|(x+i)^{p+1} - (x-i)^{p+1}|}{(x^2+1)^{p+1}} = p! \times \frac{(x^2+1)^{\frac{p+1}{2}}}{(x^2+1)^{p+1}} = \frac{p!}{(x^2+1)^{\frac{p+1}{2}}},$$

et si x est non nul on peut même écrire :

$$\frac{p!}{(x^2+1)^{\frac{p+1}{2}}} \leqslant \frac{p!}{(x^2)^{\frac{p+1}{2}}} = \frac{p!}{|x|^{p+1}}.$$

Finalement :

$$\forall p \in \mathbf{N}, \ \forall x \in \mathbf{R}^*, \quad \left|\varphi_1^{(p)}(x)\right| \leqslant \frac{p!}{|x|^{p+1}}.$$

Q13. Notons d'abord que si $\alpha = 0$, alors l'inégalité demandée est une évidence. Nous mettons donc ce cas de côté plus bas.

Pour tout réel α et tout réel x, on a : $\varphi_\alpha(x) = \varphi_1(\alpha x)$. Ainsi φ_α n'est rien d'autre que la composition de la fonction $x \mapsto \alpha x$ et de φ_1, ce qui permet d'écrire par une récurrence facile :

$$\forall \alpha \in \mathbf{R},\ \forall p \in \mathbf{N},\ \forall x \in \mathbf{R}^*, \quad \left|\varphi_\alpha^{(p)}(x)\right| = \left|\alpha^p \varphi_1^{(p)}(\alpha x)\right|, \tag{1}$$

et donc, d'après la question précédente (où l'on remplace x par αx), pour tous réels α et x non nuls on a :

$$\forall p \in \mathbf{N}, \quad |\alpha| \left|\varphi_\alpha^{(p)}(x)\right| \leqslant |\alpha|^{p+1} \times \frac{p!}{|\alpha x|^{p+1}} = \frac{p!}{|x|^{p+1}},$$

d'où le résultat.

Q14. Soit $n \in \mathbf{N}$. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a : $u_n(x) = a_n x^n \varphi_{\alpha_n}(x)$. Or $f_n : x \mapsto a_n x^n$ et φ_{α_n} sont de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$. D'après la formule de dérivation de Leibniz, l'application u_n est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ et on a :

$$\begin{aligned}\forall p \in \mathbf{N},\ \forall x \in \mathbf{R}, \quad u_n^{(p)}(x) &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} f_n^{(k)}(x) \varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a_n n(n-1)\cdots(n-k+1) x^{n-k} \varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x) \\ &= a_n \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x), \end{aligned} \tag{2}$$

d'où le résultat.

Q15. Soient $n \geqslant 0$ un entier et $p \in [\![0, n-1]\!]$. Alors $x \mapsto x^{n-k}$ s'annule en 0 pour tout $k \in [\![0, p]\!]$ (sous cette hypothèse, on a : $n-k \geqslant n-p \geqslant 1$). Donc, d'après la question précédente, on a : $u_n^{(p)}(0) = 0$. À présent, si l'on prend $p = n$ dans (**??**), on constate que le terme de la somme correspondant à $k = p = n$ est $n!\varphi_{\alpha_n}(x)$: il est égal à $n!$ quand $x = 0$. Tous les autres termes de cette somme s'annulent en 0 pour la même raison que ci-dessus. Donc :

$$u_n^{(n)}(0) = n! a_n.$$

Q16. Soient $n \in \mathbf{N}^*$, $p \in [\![0, n-1]\!]$ et $x \in \mathbf{R}$. Si $x = 0$, alors ce cas fut déjà traité dans la question **Q15**, et on a bien $\left|u_n^{(p)}(0)\right| = 0 \leqslant \dfrac{|0|^{n-p-1}}{\sqrt{n}} p! 2^n$. Supposons donc $x \neq 0$. D'après (**??**) et l'inégalité triangulaire, on a :

$$\left|u_n^{(p)}(x)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} |x|^{n-k} |a_n| \cdot \left|\varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x)\right|.$$

D'après la question **Q13**, pour tout $k \in [\![0, p]\!]$ on a :

$$|a_n| \cdot \left|\varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x)\right| = \frac{1}{\sqrt{n!}} |\alpha_n| \cdot \left|\varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x)\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{(p-k)!}{|x|^{p-k+1}},$$

et on en déduit :

$$\left|u_n^{(p)}(x)\right| \leqslant \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\frac{n!}{(n-k)!}(p-k)! = \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}}\sum_{k=0}^{p}\frac{p!}{k!}\frac{n!}{(n-k)!} \leqslant \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}}p!\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

car $n \geqslant p$ et nous sommons des termes positifs. Or, d'après la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n,$$

donc nous avons démontré :

$$\left|u_n^{(p)}(x)\right| \leqslant \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}}p!2^n,$$

et c'est le résultat attendu.

Q17. Pour répondre à cette question, nous allons appliquer le théorème de dérivation terme à terme sur tout segment de $\mathbf{R}$, dans le cas des applications de classe C^p.
Soit $a \in \mathbf{R}$. D'après la question précédente, on a :

$$\forall p \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant p+1,\ \forall x \in [-a,a], \quad \left|u_n^{(p)}(x)\right| \leqslant \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}}p!2^n \leqslant \frac{p!2^n|a|^{n-p-1}}{(n!)^{\frac{1}{2}}},$$

donc, si l'on considère la norme infinie sur $[-a,a]$:

$$\forall p \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant p+1, \quad 0 \leqslant \|u_n^{(p)}\|_\infty \leqslant \frac{p!2^n|a|^{n-p-1}}{(n!)^{\frac{1}{2}}}. \tag{3}$$

Pour tout $p \in \mathbf{N}$, montrons que la série $\sum\limits_{n\geqslant p+1}\frac{p!2^n|a|^{n-p-1}}{(n!)^{\frac{1}{2}}}$ converge. C'est une série à termes positifs, et pour tout $p \in \mathbf{N}$, pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\frac{\dfrac{p!2^{n+1}|a|^{n-p}}{((n+1)!)^{\frac{1}{2}}}}{\dfrac{p!2^n|a|^{n-p-1}}{(n!)^{\frac{1}{2}}}} = \frac{2|a|}{\sqrt{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1,$$

donc la série $\sum\limits_{n\geqslant p+1}\frac{p!2^n|a|^{n-p-1}}{(n!)^{\frac{1}{2}}}$ converge d'après la règle de D'Alembert. On en déduit, d'après (**??**) et le théorème de comparaison des séries à termes positifs, que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant p+1}u_n^{(p)}$ converge normalement, donc uniformément (et simplement), sur tout segment de la forme $[-a,a]$. D'après le théorème de dérivation terme à terme, vérifié sur tout segment de $\mathbf{R}$ (on peut en effet inclure tout segment de $\mathbf{R}$ dans un segment de la forme $[-a,a]$), on en déduit que la somme

$\sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n$ est de classe C^p sur $\mathbf{R}$ pour tout $p \in \mathbf{N}$, donc de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$. Il en est donc de même de $U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ (on ajoute une somme finie de fonctions de classe C^∞), et on a :

$$\forall p \in \mathbf{N},\ \forall x \in \mathbf{R}, \quad U^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(p)}(x).$$

Q18. On a : $U(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(0)$. Il est évident, d'après la définition de u_n, que $u_n(0) = a_n$ si $n = 0$ et $u_n(0) = 0$ si $n \geqslant 1$. Donc $U(0) = a_n$.
Soit $p \geqslant 1$ un entier. Alors :

$$U^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(p)}(0),$$

et d'après la question **Q15** on a $u_n^{(p)}(0) = 0$ dès que $p \leqslant n-1$ (c'est-à-dire $n \geqslant p+1$) et $u_p^{(p)}(0) = p!a_p$, donc :

$$U^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{p} u_n^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) + u_p^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) + p!a_p,$$

d'où le résultat.

Q19. Soit $(b_p)_{p\in\mathbf{N}}$ une suite à valeurs réelles. Inspirés par la question précédente, on cherche une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui vérifie :

$$\left\{\begin{array}{rcl} b_0 & = & a_0, \\ b_1 & = & u_0'(0) + 1!a_1, \\ b_2 & = & u_0''(0) + u_1''(0) + 2!a_2, \\ & \vdots & \\ \forall p \in \mathbf{N}\setminus\{0\},\ b_p & = & \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) + p!a_p. \end{array}\right.$$

Pour cela, on note qu'on peut construire une telle suite par récurrence ainsi, en posant successivement :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_0 & = & b_0, \\ \alpha_0 & = & a_0, \\ \forall x \in \mathbf{R},\ u_0(x) & = & a_0\varphi_{\alpha_0}(x), \end{array}\right. \quad \text{puis : } \forall p \in \mathbf{N}\setminus\{0\}, \left\{\begin{array}{rcl} a_p & = & \frac{1}{p!}\left(b_p - \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0)\right), \\ \alpha_p & = & \sqrt{p!}a_p, \\ \forall x \in \mathbf{R},\ u_p(x) & = & a_p x^p \varphi_{\alpha_p}(x). \end{array}\right.$$

Il s'agit bien d'une construction par récurrence licite (la définition de a_p n'utilise que b_p et des fonctions déjà définies pour des rangs strictement inférieurs à p). Alors, d'après les questions **Q17** et **Q18**, l'application $f = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$, et on a :

$$\forall p \in \mathbf{N}, \quad f^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) + p!a_p = \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) + b_p - \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) = b_p,$$

ce qui démontre bien l'existence d'une fonction f indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}$ telle que pour tout $p \in \mathbf{N}$, on ait : $f^{(p)}(0) = b_p$.