# CCP 2018 - Corrigé

## Partie I - Quelques résultats généraux

1. $U_0 = 1$ et $L_0 = \dfrac{1}{2^0 0!} U_0^{(0)} = 1$.
   $U_1 = (X^2-1)$ et $L_1 = \dfrac{1}{2^1 1!} U_1^{(1)} = \dfrac{1}{2}(2X) = X$.
   $U_2 = (X^2-1)^2 = X^4 - 2X^2 + 1$ et $L_2 = \dfrac{1}{2^2 2!} U_2^{(2)} = \dfrac{1}{8}(4X^3-4X)' = \dfrac{1}{8}(12X^2-4) = \dfrac{1}{2}(3X^2-1)$.

2. • Montrons par récurrence que, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\deg(U_n^{(k)}) = 2n-k$ et $\mathrm{cd}(U_n^{(k)}) = \displaystyle\prod_{i=0}^{k-1}(2n-i)$ $(HR_k)$.

   **Initialisation :** $U_n^{(0)} = U_n = (X^2-1)^n = X^{2n} + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}(X^2)^k$ est bien un polynôme de degré $2n-0$ ayant pour coefficient dominant 1.
   **Hérédité :** Soit $k \in [\![0,n-1]\!]$ et supposons $HR_k$ vérifiée.
   Alors $U_n^{(k)}$ est de degré $2n-k$ et a pour coefficient dominant $\displaystyle\prod_{i=0}^{k-1}(2n-i)$, donc il existe $Q \in \mathbb{R}_{2n-k-1}[X]$ tel que

   $$U_n^{(k)} = \left(\prod_{i=0}^{k-1}(2n-i)\right) X^{2n-k} + Q,$$

   donc

   $$\begin{aligned} U_n^{(k+1)} &= \left(\prod_{i=0}^{k-1}(2n-i)\right)(2n-k)X^{2n-k-1} + Q' \\ &= \left(\prod_{i=0}^{k}(2n-i)\right) X^{2n-k-1} + \underbrace{Q'}_{\in \mathbb{R}_{2n-k-2}[X]} \end{aligned}$$

   donc $U_n^{(k+1)}$ est bien un polynôme de degré $2n-(k+1)$ et de coefficient dominant $\left(\displaystyle\prod_{i=0}^{k+1-1}(2n-i)\right) X^{2n-k} + Q$. On a bien $HR_{k+1}$.
   **Conclusion :** D'où, par récurrence, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $U_n^{(k)}$ est de degré $2n-k$ et a pour coefficient dominant $\displaystyle\prod_{i=0}^{k-1}(2n-i)$.
   • Par suite, $L_n = \dfrac{1}{2^n n!} U_n^{(n)}$ est de degré $2n-n=n$ et a pour coefficient dominant :

   $$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2^n n!}\prod_{i=0}^{n-1}(2n-i) = \frac{1}{2^n n!}\prod_{i=n+1}^{2n} i \\ &= \frac{1}{2^n n!}\frac{(2n)!}{n!} = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} = \binom{2n}{n}\frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

3. La famille $(L_0, \ldots, L_n)$ est libre (degrés échelonnés) et elle est composée de $n+1$ éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, espace vectoriel de dimension $n+1$, donc $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = (X^2-1)^n = (X-1)^n(X+1)^n$, donc $U_n$ a deux racines, -1 et 1, de multiplicité $n$.
   • Comme $U_n = (X^2-1)^n$, $U_n' = n(2X)(X^2-1)^{n-1} = 2n(X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}(X-0)$, donc, en prenant $\lambda = 2n$ et $\alpha = 0 \in ]-1,1[$, on a bien

   $$U_n' = \lambda(X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}(X-\alpha).$$

   **Remarque.** Promis, je n'ai pas fait exprès de les déterminer, ils sont apparus tous seuls, comme des grands...
   L'énoncé attendait certainement une autre méthode, que je vais mettre en oeuvre ci-dessous

   • Comme -1 et 1 sont racines de multiplicité $n$ de $U_n$, elles sont racines de multiplicité $n-1$ de $U_n'$, donc il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que

   $$U_n' = (X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}Q.$$

Comme $\deg(U_n') = \deg(U_n) - 1 = 2n-1$ et $\deg((X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}) = 2n-2$, on a $\deg(Q) = 1$.
On a $U_n(1) = U_n(-1)$ où $U_n$ est continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$ (c'est un polynôme!), donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $\alpha \in ]-1,1[$ tel que $U_n'(\alpha) = 0$. Or, $U_n'(\alpha) = \underbrace{(\alpha-1)^{n-1}(\alpha+1)^{n-1}}_{\neq 0 \text{ car } \alpha \neq \pm 1} Q(\alpha)$, donc on a $Q(\alpha) = 0$.
Comme on a aussi $\deg(Q) = 1$ et $Q(\alpha) = 0$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Q = \lambda(X-\alpha)$ et on a donc

$$U_n' = \lambda(X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}(X-\alpha).$$

5. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.
Supposons qu'il existe des réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel $\mu$ tels que :

$$U_n^{(k)} = \mu(X-1)^{n-k}(X+1)^{n-k}(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_k).$$

On supposera de plus, quitte à renuméroter, que $\alpha_1 < \cdots < \alpha_k$.
• Alors, comme $-1$ et 1 sont racines de multiplicité $n-k \geq 1$ de $U_n^{(k)}$, -1 et 1 sont racines de multiplicité $n-k-1$ de $(U_n^{(k)})' = U_n^{(k+1)}$, donc il existe donc $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $U_n^{(k+1)} = (X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k+1}Q$.
• Comme $\deg(U_n^{(k+1)}) = 2n-k-1$ et $\deg((X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k+1}) = 2n-2k-2$, on a $\deg(Q) = k+1$.
• Posons $\alpha_0 = -1$ et $\alpha_{k+1} = 1$. Alors on a $\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_k < \alpha_{k+1}$.
Pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$, $U_n^{(k)}$ est continu sur $[\alpha_{k-1}, \alpha_k]$, dérivable sur $]\alpha_{k-1}, \alpha_k[$ (polynôme) et $U_n^{(k)}(\alpha_{k-1}) = U_n^{(k)}(\alpha_k) \quad (=0)$.
Donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $\beta_k \in ]\alpha_{k-1}, \alpha_k[$ tel que $(U_n^{(k)})'(\beta_k) = 0 \Leftrightarrow U_n^{(k+1)}(\beta_k) = 0$.
On a de plus, par construction,

$$-1 = \alpha_0 < \beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \cdots < \alpha_k < \beta_{k+1} < \alpha_{k+1} = 1,$$

donc les réels $(\beta_i)_{1 \leq i \leq k+1}$ sont deux à deux distincts.
• Pour tout $i \in [\![1, k+1]\!]$, $U_n^{(k+1)}(\beta_i) = \underbrace{(\beta_i - 1)^{n-1}(\beta_i+1)^{n-1}}_{\neq 0 \text{ car } \beta_i \neq \pm 1} Q(\beta_i)$, donc, comme $U_n^{(k+1)}(\beta_i) = 0$, on a $Q(\beta_i) = 0$, et donc $\beta_i$ est une racine de $Q$.
• $Q$ est un polynôme de degré $k+1$ qui admet pour racines (distinctes!) $\beta_1, \ldots, \beta_{k+1}$, donc il existe $\nu \in \mathbb{R}$ tel que $Q = \nu(X-\beta_1)\cdots(X-\beta_{k+1})$, et donc

$$U_n^{(k+1)} = \nu(X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1}(X-\beta_1)\cdots(X-\beta_{k+1}).$$

6. • Les questions 4 (initialisation pour $k=1$) et 5 (hérédité pour $k \in [\![0, n-1]\!]$) permettent de démontrer par récurrence que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, il existe des réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel $\mu_k$ tels que :

$$U_n^{(k)} = \mu_k(X-1)^{n-k}(X+1)^{n-k}(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_k).$$

• En particulier, pour $k = n$, il existe des réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel $\mu_n$ tels que :

$$\begin{aligned} L_n = \frac{1}{2^n n!} U_n^{(n)} &= \frac{1}{2^n n!} \mu_n (X-1)^{n-n}(X+1)^{n-n}(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_n) \\ &= \frac{1}{2^n n!} \mu_n (X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_n), \end{aligned}$$

donc $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont $n$ racines distinctes de $L_n$, et toutes ces racines sont dans $]-1,1[$.
En les ordonnant, on a bien l'existence des réels $-1 < x_1 < \cdots < x_n < 1$ tels que

$$L_n = a_n \prod_{i=1}^{n} (X - x_i)$$

car $L_n$ est de degré $n$ et de coefficient dominant $a_n$.

## Partie II - Etude des éléments propres de l'endomorphisme $\phi$

7. Pour tout $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \phi(\lambda P + Q) &= (X^2-1)(\lambda P + Q)'' + 2X(\lambda P + Q)' \\ &= (X^2-1)(\lambda P'' + Q'') + 2X(\lambda P' + Q') \quad \text{(linéarité de la dérivation)} \\ &= \lambda((X^2-1)P'' + 2XP') + ((X^2-1)Q'' + 2XQ') \\ &= \lambda\phi(P) + \phi(Q), \end{aligned}$$

donc $\phi$ est une application linéaire.
De plus, elle va de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ (énoncé), donc c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

8. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\phi(P) \in \mathbb{R}[X]$ et

$$\begin{aligned}\deg(\phi(P)) &= \deg((X^2-1)P'' + 2XP') \leq \max((X^2-1)P'', 2XP') = \max(2+\deg(P''), 1+\deg(P')) \\ &\leq \max(2+\deg(P)-2, 1+\deg(P)-1) = \max(\deg(P), \deg(P)) = \deg(P),\end{aligned}$$

donc $\phi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
$\mathbb{R}_n[X]$ est donc bien stable par $\phi$.

**Remarque.** Pour rappel, $\deg(P+Q) \boxed{\leq} \max(\deg(P), \deg(Q))$, avec égalité si $\deg(P) = \deg(Q)$,
et $\deg(P') \boxed{\leq} \deg(P) - 1$, avec égalité si $\deg(P) \geq 1$.

9. Soit $M = (m_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}$ la matrice de $\phi_n$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Alors, $\forall j \in [\![0, n]\!]$, $\phi(X^j) = \sum_{i=0}^{n} m_{i,j} X^i$.

Or,

$$\begin{aligned}\phi(X^0) &= \phi(1) = 0 \\ \phi(X^1) &= 2X \\ \text{et, pour tout } j \in [\![2,n]\!], \phi(X^j) &= (X^2-1)j(j-1)X^{j-2} + 2XjX^{j-1} \\ &= j(j-1)X^j - j(j-1)X^{j-2} + 2jX^j = j(j+1)X^j - j(j-1)X^{j-2}.\end{aligned}$$

Par identification, on a :

$$\begin{aligned}m_{0,0} = 0 = 0(0+1) &\quad \text{et} \quad \forall i \geq 1,\ m_{i,0} = 0 \\ m_{1,1} = 2 = 1 \times 2 &\quad \text{et} \quad \forall i \geq 2,\ m_{i,1} = 0 \\ \forall j \in [\![2,n]\!],\ m_{j,j} = j(j+1) &\quad \text{et} \quad \forall i \geq j+1,\ m_{i,j} = 0\end{aligned}$$

donc $M$ est bien triangulaire supérieure et, $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $m_{k,k} = k(k+1)$.

**Remarque.** Pour tout $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$, $\quad m_{i,j} = \begin{cases} j(j+1) & \text{si } i = j \\ -j(j-1) & \text{si } i = j-2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

10. Comme $M$ est triangulaire, ses valeurs propres se lisent sur la diagonale.
On a donc $\mathrm{Sp}(M) = \{k(k+1),\ k \in [\![0,n]\!]\}$.
Enfin, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(k+1)(k+2) - k(k+1) = 2(k+1) > 0$, donc la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.
Les réels $(k(k+1))_{k \in [\![0,n]\!]}$ sont donc deux à deux distincts, donc $M$ admet $n+1$ valeurs propres distinctes, et $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$, donc $M$ est diagonalisable, donc $\phi_n$ est diagonalisable.

11. • Pour $k = 0$, $U_k' = 0$ et $2kXU_k = 0$, donc $(X^2-1)U_k' - 2kXU_k = 0$.
• Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $U_k' = 2kX(X^2-1)^{k-1}$, donc $(X^2-1)U_k' - 2kXU_k = 2kXU_k - 2kXU_k = 0$.
• Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on a bien $(X^2-1)U_k' - 2kXU_k = 0$.

12. D'après la formule de Leibniz pour les polynômes, en prenant la convention (habituelle) $\binom{n}{k} = 0$ si $k \notin [\![0,n]\!]$,

$$\begin{aligned}((X^2-1)U_k')^{(k+1)} &= \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} (X^2-1)^{(i)} (U_k')^{(k+1-i)} \\ &= \binom{k+1}{0}(X^2-1)(U_k')^{(k+1)} + \binom{k+1}{1}(X^2-1)'(U_k')^{(k)} + \binom{k+1}{2}(X^2-1)''(U_k')^{(k-1)} \\ &\quad + \sum_{k=3}^{k+1-i} \binom{k+1}{i} \underbrace{(X^2-1)^{(i)}}_{=0 \text{ car } i \geq 3} (U_k')^{(k+1-i)} \\ &= (X^2-1)U_k^{(k+2)} + 2(k+1)XU_k^{(k+1)} + 2\frac{k(k+1)}{2}U_k^{(k)} \\ \text{et } (2kXU_k)^{(k+1)} &= \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} (2kX)^{(i)} (U_k)^{(k+1-i)} \\ &= \binom{k+1}{0}(2kX)(U_k)^{(k+1)} + \binom{k+1}{1}(2kX)'(U_k)^{(k)} + \sum_{i=2}^{k+1} \binom{k+1}{i} \underbrace{(2kX)^{(i)}}_{=0 \text{ car } i \geq 2} (U_k)^{(k+1-i)} \\ &= 2kXU_k^{(k+1)} + (k+1)2kU_k^{(k)},\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}((X^2-1)U_k'-2kXU_k)^{(k+1)} &= (X^2-1)U_k^{(k+2)}+2(k+1)XU_k^{(k+1)}+k(k+1)U_k^{(k)}-2kXU_k^{(k+1)}-(k+1)2kU_k^{(k)}\\ &= (X^2-1)U_k^{(k+2)}+2XU_k^{(k+1)}-k(k+1)U_k^{(k)}.\end{aligned}$$

Par suite, d'après la question 11,

$$(X^2-1)U_k^{(k+2)}+2XU_k^{(k+1)}-k(k+1)U_k^{(k)}=((X^2-1)U_k'-2kXU_k)^{(k+1)}=(0)^{(k+1)}=0.$$

13. Pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $L_k\in\mathbb{R}_n[X]$ (car $\deg(L_k)=k\leq n$), $L_k\neq 0$ (car $a_k\neq 0$) et :

$$\phi_n(L_k)=\phi(U_k^{(k)})=(X^2-1)U_k^{(k+2)}+2XU_k^{(k+1)}\underset{\text{cf Q12}}{=}k(k+1)U_k^{(k)}=k(k+1)L_k,$$

donc $L_k$ est un vecteur propre de $\phi_n$ associé à la valeur propre $k(k+1)$.

14. • $\phi_n$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ (de dimension $n+1$) qui admet $n+1$ valeurs propres distinctes, donc tous les espaces propres de $\phi_n$ sont de dimension 1.
De plus, pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $L_k\in E_{k(k+1)}(\phi_n)$, donc $\mathrm{Vect}(L_k)\subset E_{k(k+1)}(\phi_n)$ et, par égalité des dimensions, $E_{k(k+1)}(\phi_n)=\mathrm{Vect}(L_k)$.
On a donc $\boxed{\mathrm{Sp}(\phi_n)=\{k(k+1),\ k\in[\![0,n]\!]\}\text{ et, pour tout }k\in[\![0,n]\!],\ E_{k(k+1)}(\phi_n)=\mathrm{Vect}(L_k).}$
• Pour tout $k\in\mathbb{N}$, $k(k+1)\in\mathrm{Sp}(\phi_k)$, pour tout $P\in\mathrm{Vect}(L_k)=E_{k(k+1)}(\phi_k)$,

$$\phi(P)=\phi_k(P)=k(k+1)P,$$

donc $P$ est un vecteur propre de $\phi$ associé à la valeur propre $k(k+1)$.
On a donc $\{k(k+1),\ k\in\mathbb{N}\}\subset\mathrm{Sp}(\phi)$ et, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\mathrm{Vect}(L_k)\subset E_{k(k+1)}(\phi)$.
• Réciproquement, soit $\lambda$ une valeur propre de $\phi$ et $P\neq 0$ un vecteur propre associé à $\lambda$.
Soit $n=\deg(P)$. Alors

$$\lambda P=\phi(P)=\phi_n(P),$$

donc $P$ est un vecteur propre de $\phi_n$ associé à la valeur propre (de $\phi_n$) $\lambda$.
Par suite, $\lambda\in\mathrm{Sp}(\phi_n)$, donc il existe $k\in[\![0,n]\!]$ tel que $\lambda=k(k+1)$ et $P\in E_{k(k+1)}(\phi_n)=\mathrm{Vect}(L_k)$.
On a donc $\mathrm{Sp}(\phi)\subset\{k(k+1),\ k\in\mathbb{N}\}$ et, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $E_{k(k+1)}(\phi)\subset\mathrm{Vect}(L_k)$.
• Par double inclusion,

$$\boxed{\mathrm{Sp}(\phi)=\{k(k+1),\ k\in\mathbb{N}\}\quad\text{et}\quad\forall k\in\mathbb{N},\quad E_{k(k+1)}(\phi)=\mathrm{Vect}(L_k).}$$

# Partie III - Distance au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$

15. • Pour tout $P,Q\in\mathbb{R}[X]$, $\langle P,Q\rangle=\displaystyle\int_{-1}^{1}P(t)Q(t)dt$ existe car $t\mapsto P(t)Q(t)$ est continue sur le segment $[-1,1]$.
• Pour tout $P,Q,R\in\mathbb{R}[X]$, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\langle(\lambda P+Q),R\rangle &= \int_{-1}^{1}(\lambda P+Q)(t)R(t)dt\\ &= \int_{-1}^{1}\lambda P(t)R(t)+Q(t)R(t)dt\\ &= \lambda\int_{-1}^{1}P(t)R(t)dt+\int_{-1}^{1}Q(t)R(t)dt\quad\text{(par linéarité de l'intégrale)}\\ &= \lambda\langle P,R\rangle+\langle Q,R\rangle,\end{aligned}$$

donc $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est linéaire à gauche.
• Pour tout $P,Q\in\mathbb{R}[X]$,

$$\langle P,Q\rangle=\int_{-1}^{1}P(t)Q(t)dt=\int_{-1}^{1}Q(t)P(t)dt=\langle Q,P\rangle,$$

donc $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est symétrique.
• $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est symétrique et linéaire à gauche, donc bilinéaire.
• Pour tout $P\in\mathbb{R}[X]$,

$$\langle P,P\rangle=\int_{-1}^{1}(P(t))^2dt\geq 0$$

par positivité de l'intégrale (bornes dans le bon sens), donc $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est positif.
• Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ tel que $\langle P,P\rangle=0$.
Comme $t\mapsto P(t)^2$ est continue et positive sur $[-1,1]$ et $-1<1$,

$$\langle P,P\rangle=0\Leftrightarrow\int_{-1}^{1}(P(t))^2dt=0\Leftrightarrow\forall t\in[-1,1],\ P(t)=0.$$

Par suite, $P$ a une infinité de racines, donc $P$ est nul.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$ est donc défini.
• $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est donc bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

16. Pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$,

$$\langle \phi(P), Q \rangle = \int_{-1}^{1} ((t^2-1)P''(t) + 2tP'(t))Q(t)dt.$$

Posons $u'(t) = (t^2-1)P''(t) + 2tP'(t)$, $u(t) = (t^2-1)P'(t)$, $v(t) = Q(t)$, $v'(t) = Q'(t)$.
Comme $u$ et $v$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1, 1]$, on peut intégrer par parties et on a :

$$\begin{aligned}\langle \phi(P), Q \rangle &= \int_{-1}^{1} ((t^2-1)P''(t) + 2tP'(t))Q(t)dt \\ &= \underbrace{\left[(t^2-1)P'(t)Q(t)\right]_{-1}^{1}}_{=0} - \int_{-1}^{1} (t^2-1)P'(t)Q'(t)dt = -\int_{-1}^{1} (t^2-1)P'(t)Q'(t)dt.\end{aligned}$$

Cette dernière écriture étant symétrique en $P$ et $Q$, on obtient :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2,\ \langle \phi(P), Q \rangle = \langle \phi(Q), P \rangle \underset{\text{par symétrie de } \langle \cdot, \cdot \rangle}{=} \langle P, \phi(Q) \rangle.$$

17. Soit $k$ et $n$ deux entiers naturels distincts. On a :

$$\begin{aligned}k(k+1)\langle L_k, L_n \rangle &= \langle k(k+1)L_k, L_n \rangle \quad \text{(linéarité à gauche)} \\ &= \langle \phi(L_k), L_n \rangle \quad (\text{car } L_k \in E_{k(k+1)}(\phi)) \\ &= \langle L_k, \phi(L_n) \rangle \quad \text{(d'après la question précédente)} \\ &= \langle L_k, n(n+1)L_n \rangle \quad (\text{car } L_n \in R_{n(n+1)}(\phi)) \\ &= n(n+1)\langle L_k, L_n \rangle \quad \text{(linéarité à droite)},\end{aligned}$$

donc $(k(k+1) - n(n+1))\langle L_k, L_n \rangle = 0$, donc $\langle L_k, L_n \rangle = 0$, car, comme $(k(k+1))_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite strictement croissante (cf. question 10), $k(k+1) \neq n(n+1)$.
La famille $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc bien orthogonale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Comme $(L_0, \ldots, L_{n-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ (cf. question 3), pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, il existe $n$ réels $a_0, \cdots a_{n-1}$ tels que $P = \sum_{i=0}^{n-1} a_i L_i$. Par suite,

$$\begin{aligned}\langle P, L_n \rangle &= \left\langle \sum_{i=0}^{n-1} a_i L_i, L_n \right\rangle \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i \langle L_i, L_n \rangle \quad \text{(linéarité à gauche)} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} 0 \quad (\text{car, pour tout } i \in [\![0, n-1]\!],\ i \neq n \text{ et d'après la question 17}) \\ &= 0.\end{aligned}$$

19. • Soit $k$ et $n$ deux entiers naturels distincts. On a :

$$\langle Q_k, Q_n \rangle = \sqrt{\frac{2k+1}{2}}\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\langle L_k, L_n \rangle = 0,$$

donc la famille $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
• De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|Q_n\| \underset{\text{homogénéité}}{=} \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\|L_n\| = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\sqrt{\frac{2}{2n+1}} = 1,$$

donc $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthonormale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
• De plus, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, en posant $n = \deg(P)$, il existe $a_0, ..., a_n$ tels que $P = \sum_{i=0}^{n} a_i L_i = \sum_{i=0}^{n} \left( a_i \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \right) Q_i$, donc la famille $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est génératrice de $\mathbb{R}[X]$.
Comme elle est de plus libre (car orthogonale), c'est une base de $\mathbb{R}[X]$.
• $\boxed{(Q_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est donc une base orthonormale de } \mathbb{R}[X] \text{ pour le produit scalaire } \langle \cdot, \cdot \rangle.}$

20. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   - $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathbb{R}[X]$.
   Donc, d'après la caractérisation par la distance du projeté orthogonal sur un sous-espace vectoriel de dimension finie, il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $d(P, \mathbb{R}_n[X]) = \|P - T_n\|$ et $T_n$ est le projeté orthogonal de $P$ sur $\mathbb{R}_n[X]$.
   - D'après le théorème de Pythagore,
   $$\|P\|^2 = \|T_n\|^2 + \|P - T_n\|^2,$$
   donc
   $$\begin{aligned} d(P, \mathbb{R}_n[X])^2 &= \|P - T_n\|^2 = \|P\|^2 - \|T_n\|^2 \\ &= \|P\|^2 - \left\| \sum_{k=0}^{n} \langle P, Q_k \rangle Q_k \right\|^2 \quad \text{(caractérisation du projeté orthogonal dans une base orthonormée)} \\ &= \|P\|^2 - \sum_{k=0}^{n} \langle P, Q_k \rangle^2 \quad \text{(car } (Q_k) \text{ est une famille orthonormale)} \\ &= \|P\|^2 - \sum_{k=0}^{n} (c_k(P))^2, \quad \text{où } c_k(P) = \langle P, Q_k \rangle. \end{aligned}$$

21. - On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (c_k(P))^2 = \|P\|^2 - d(P, \mathbb{R}_n[X])^2 \leq \|P\|^2$.
   - De plus, la suite $\displaystyle\left( \sum_{k=0}^{n} (c_k(P))^2 \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, donc elle converge (croissante et majorée par $\|P\|^2$).
   - Par suite, la série $\sum (c_k(P))^2$ converge et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (c_k(P))^2 \leq \|P\|^2$.

   **Remarque.** Je pense que la preuve ci-dessus est celle attendue, mais il y a plus simple et on aboutit en plus à un résultat plus précis...
   Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Posons $n = \deg(P)$.
   Alors, pour tout $k > n$, $\langle P, Q_k \rangle = \sqrt{\dfrac{2k+1}{2}} \langle P, L_k \rangle = 0$ (d'après la question 18)
   D'où $\sum (c_k(P)^2$ converge (car $(c_k(P))^2$ est nul au-delà d'un certain rang) et
   $$\sum_{k=0}^{+\infty} (c_k(P))^2 = \sum_{k=0}^{n} (c_k(P))^2 = \sum_{k=0}^{n} \langle P, Q_k \rangle^2 = \|P\|^2$$
   car $(Q_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$.

# Partie IV - Fonction génératrice

Les racines du trinôme $X^2 - 2X - 1$ sont
$$r_1 = \frac{2 + \sqrt{8}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{2 - \sqrt{8}}{2},$$
donc $r = r_1$ et on a $r > 2$.

22. Soit $x \in [-1, 1]$.
   Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|L_n(x)| \leq r^n$ $(HR_n)$
   **Initialisation :** $L_0(x) = 1$ et $r^0 = 1$, donc on a bien $HR_0$.
   $|L_1(x)| = |x|$ et $r^1 = r$, donc, comme $r > 2$ et $|x| \in [0, 1]$, on a bien $|L_1(x)| \leq r^1$. On a bien $HR_1$.
   **Hérédité :** Soit $n \geq 1$ et supposons $HR_k$ vérifiée pour tout $k \leq n$.

Alors,

$$\begin{aligned}
|L_{n+1}(x)| &= \left|\frac{(2n+1)xL_n(x)-nL_{n-1}(x)}{n+1}\right| \quad \text{(d'après la relation admise)}\\
&\leq \frac{(2n+1)|x|\cdot|L_n(x)|+n|L_{n-1}(x)|}{n+1} \quad \text{(inégalité triangulaire)}\\
&\leq \frac{(2n+1)r^n+nr^{n-1}}{n+1} \quad (\text{car } |x|\leq 1 \text{ et d'après } HR_n \text{ et } HR_{n-1})\\
&= \frac{2n+1}{n+1}r^n+\frac{n}{n+1}r^{n-1} \leq 2r^n+r^{n-1}\\
&= r^{n-1}(2r+1) = r^{n-1}r^2 \quad (\text{car } r^2-2r-1=0)\\
&= r^{n+1}. \quad \text{On a bien } HR_{n+1}.
\end{aligned}$$

**Conclusion :** D'où, par récurrence, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|L_n(x)|\leq r^n$ (et ce pour tout $x\in[-1,1]$).

23. Soit $x\in[-1,1]$.

Pour tout $t\in\left]-\frac{1}{r},\frac{1}{r}\right[$,

$$|L_n(x)t^n|\leq r^nt^n=(rt)^n.$$

Or, $rt\in[0,1[$, donc la série géométrique $\sum_{n\geq 0}(rt)^n$ converge, donc, par comparaison, $\sum_{n\geq 0}|L_n(x)t^n|$ converge, donc $\sum_{n\geq 0}L_n(x)t^n$ converge absolument, donc $t$ est dans le disque ouvert de convergence.

Par suite, $\left]-\frac{1}{r},\frac{1}{r}\right[$ est inclus dans le disque ouvert de convergence, donc $R(x)\geq\frac{1}{r}$.

24. $S_x : t\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}L_n(x)t^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son disque ouvert de convergence, donc en particulier sur $\left]-\frac{1}{r},\frac{1}{r}\right[$.

De plus, pour tout $t\in\left]-\frac{1}{r},\frac{1}{r}\right[$,

$$S_x'(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}nL_n(x)t^{n-1},$$

donc

$$\begin{aligned}
(1-2tx+t^2)S_x'(t)+(t-x)S_x(t) &= (1-2tx+t^2)\sum_{n=1}^{+\infty}nL_n(x)t^{n-1}+(t-x)\sum_{n=0}^{+\infty}L_n(x)t^n\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}nL_n(x)t^{n-1}-\sum_{n=1}^{+\infty}2nxL_n(x)t^n+\sum_{n=1}^{+\infty}nL_n(x)t^{n+1}+\sum_{n=0}^{+\infty}L_n(x)t^{n+1}-\sum_{n=0}^{+\infty}xL_n(x)t^n\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)L_{n+1}(x)t^n-\sum_{n=1}^{+\infty}2nxL_n(x)t^n+\sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)L_{n-1}(x)t^n+\sum_{n=1}^{+\infty}L_{n-1}(x)t^n-\sum_{n=0}^{+\infty}xL_n(x)t^n\\
&= \left(L_1(x)+\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)L_{n+1}(x)t^n\right)-\sum_{n=1}^{+\infty}2nxL_n(x)t^n+\left(\sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)L_{n-1}(x)t^n-0\right)\\
&\qquad+\sum_{n=1}^{+\infty}L_{n-1}(x)t^n-\left(xL_0(x)+\sum_{n=1}^{+\infty}xL_n(x)t^n\right)\\
&= L_1(x)-xL_0(x)+\sum_{n=1}^{+\infty}\left((n+1)L_{n+1}(x)-2nxL_n(x)+(n-1)L_{n-1}(x)+L_{n-1}(x)-xL_n(x)\right)t^n\\
&= x-x+\sum_{n=1}^{+\infty}\underbrace{\left((n+1)L_{n+1}(x)-(2n+1)xL_n(x)+nL_{n-1}(x)\right)}_{=0\text{ d'après la relation vérifiée par }L_n}t^n\\
&= 0,
\end{aligned}$$

donc $S_x$ vérifie bien l'équation différentielle : $(1-2tx+t^2)y'+(t-x)y=0$.

25. • Pour tout $x\in[-1,1]$, pour tout $t\in\left]-\frac{1}{r},\frac{1}{r}\right[$,

$$|2xt|\leq 2\frac{1}{r}\times 1=\frac{2}{r}\underset{\text{car }r>2}{<}1\leq 1+t^2,$$

donc $1 - 2tx + t^2 > 0$.
Par suite,

$$(1 - 2tx + t^2)y' + (t - x)y = 0 \Leftrightarrow y' + \frac{t - x}{1 - 2tx + t^2} y = 0.$$

Une primitive de $t \mapsto \dfrac{t - x}{1 - 2tx + t^2}$ est $t \mapsto \dfrac{1}{2} \ln(1 - 2tx + t^2)$ (car $1 - 2tx + t^2 > 0$).
Les solutions de l'équation homogène $(1 - 2tx + t^2)y' + (t - x)y = 0$ sont donc de la forme :

$$t \mapsto C \exp\left(-\frac{1}{2} \ln(1 - 2tx + t^2)\right) = \frac{C}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}}.$$

• $S_x$ est une solution de $(1 - 2tx + t^2)y' + (t - x)y = 0$ sur $\left]-\dfrac{1}{r}, \dfrac{1}{r}\right[$, donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in \left]-\frac{1}{r}, \frac{1}{r}\right[, \quad S_x(t) = \frac{C}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}}.$$

Enfin, $S_x(0) = L_0 = 1$, donc $\dfrac{C}{\sqrt{1}} = 1 \Leftrightarrow C = 1$.
• On a donc bien,

$$\forall x \in [-1, 1], \ \forall t \in \left]-\frac{1}{r}, \frac{1}{r}\right[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x) t^n = \frac{1}{\sqrt{t^2 - 2xt + 1}}.$$

26. • En prenant $t = 0 \in \left]-\dfrac{1}{r}, \dfrac{1}{r}\right[$ dans l'égalité obtenue en 25, on obtient

$$\forall x \in [-1, 1], \quad L_0(x) = 1,$$

donc $L_0 - 1$ a une infinité de racines (tous les éléments de $[-1, 1]$), donc $L_0 - 1 = 0$, donc $L_0 = 1$.
• En dérivant la relation obtenue en 25, on obtient :

$$\forall x \in [-1, 1], \ \forall t \in \left]-\frac{1}{r}, \frac{1}{r}\right[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n L_n(x) t^{n-1} = -\frac{2(t - x)}{2(t^2 - 2xt + 1)\sqrt{t^2 - 2xt + 1}}.$$

En prenant $t = 0 \in \left]-\dfrac{1}{r}, \dfrac{1}{r}\right[$, on obtient

$$L_1(x) = -\frac{-2x}{2} = x,$$

donc le polynôme $L_1 - X$ a une infinité de racines (les éléments de $[-1, 1]$), donc $L_1 - X = 0$, donc $L_1 = X$.
• En dérivant une seconde fois, on obtient :

$$\forall x \in [-1, 1], \ \forall t \in \left]-\frac{1}{r}, \frac{1}{r}\right[, \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) L_n(x) t^{n-2} = \ldots \quad \text{(calcul inutile, on veut juste l'idée)}$$

En prenant $t = 0 \in \left]-\dfrac{1}{r}, \dfrac{1}{r}\right[$, on va obtenir

$$2L_2(x) = 3x^2 - 1 \text{(vu ce que l'on a obtenu en question 1)},$$

donc le polynôme $2L_2 - 3X^2 + 1$ a une infinité de racines (les éléments de $[-1, 1]$), donc $2L_2 - 3X^2 + 1 = 0$, donc $L_2 = \dfrac{1}{2}(3X^2 - 1)$.

# Partie V - Expression intégrale des polynômes de Legendre

27. Soit $t \in ]-1, 1[$.
Pour tout $u \in [-\pi, \pi]$,

$$\begin{aligned} |v_n(u)| &= |t|^n |\cos\theta + i \sin\theta \cos u|^n = |t|^n \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta \cos^2 u}^{\,n} \\ &\leq |t|^n \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}^{\,n} = |t|^n \times 1^n = |t|^n, \end{aligned}$$

donc $\|v_n\|_\infty^{[-\pi,\pi]} \leq |t|^n$.
Or, $\displaystyle\sum_{n \geq 0} |t|^n$ converge (géométrique de raison $|t| \in [0, 1[$), donc, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \|v_n\|_\infty^{[-\pi,\pi]}$ converge.
La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n \geq 0} v_n$ converge donc bien normalement sur $[-\pi, \pi]$.

28. • Pour tout $u \in [-\pi, \pi]$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} (t\cos\theta + it\sin\theta\cos u)^n = \frac{1}{1 - t\cos\theta - it\sin\theta\cos u}$$

(série géométrique de raison $t\cos\theta + it\sin\theta\cos u$ de module $|t| < 1$).
• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n$ est continue sur $[-\pi, \pi]$ par opérations sur les fonctions usuelles.
La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[-\pi, \pi]$.
On peut donc intervertir série et intégrale et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n(\theta)t^n = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} v_n(u)du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(u)du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{du}{1 - t\cos\theta - it\sin\theta\cos u}.$$

29. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos u}{1 + a^2\cos^2 u}du$ existe comme intégrale d'une fonction continue sur un segment.
Posons le changement de variable affine $v = \pi - u$. on a $dv = -du$ et

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos u}{1 + a^2\cos^2 u}du = \int_{\pi}^{0} \frac{\cos(\pi - v)}{1 + a^2\cos^2(\pi - v)}(-dv) = \int_0^{\pi}\frac{-\cos v}{1 + a^2\cos^2 v}dv = -\int_0^{\pi}\frac{\cos u}{1 + a^2\cos^2 u}du,$$

donc $\displaystyle 2\int_0^{\pi}\frac{\cos u}{1 + a^2\cos^2 u}du = 0$, donc $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\cos u}{1 + a^2\cos^2 u}du = 0$.

30. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{du}{1 + a^2\cos^2 u}$ existe comme intégrale d'une fonction continue sur $[0, \pi/2]$.
Posons le changement de variable $u = \arctan(v) \Leftrightarrow v = \tan(u)$.
Ce changement de variable est de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissant sur $[0, \pi/2[$, donc il réalise une bijection de $[0, \pi/2[$ sur $[0, +\infty[$. De plus, $du = \dfrac{1}{1 + v^2}dv$.
Enfin, $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{du}{1 + a^2\cos^2 u}$ converge, donc, en effectuant ce changement de variable, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2}\frac{du}{1 + a^2\cos^2 u} &= \int_0^{+\infty}\frac{\frac{dv}{1+v^2}}{1 + a^2\cos^2(\arctan v)} \\
&= \int_0^{+\infty}\frac{\frac{dv}{1+v^2}}{1 + a^2\frac{1}{1+v^2}} \quad (\text{car } \cos(\arctan(v)) = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}) \\
&= \int_0^{+\infty}\frac{dv}{1 + v^2 + a^2} = \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+a^2}\frac{1}{1 + \frac{v^2}{1+a^2}}dv \\
&= \frac{1}{1+a^2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1 + \left(\frac{v}{\sqrt{1+a^2}}\right)^2}dv = \frac{1}{1+a^2}\left[\sqrt{1+a^2}\arctan\left(\frac{v}{\sqrt{1+a^2}}\right)\right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}.
\end{aligned}$$

31. • Pour tout $t \in ]-1, 1[$, pour tout $\theta \in [0, \pi]$,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{du}{1 - t\cos\theta - it\sin\theta\cos u} = \frac{1}{1 - t\cos\theta}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{du}{1 - i\left(\frac{t\sin\theta}{1 - t\cos\theta}\right)\cos u} \quad (\text{car } |t\cos\theta| < 1, \text{ donc } 1 - t\cos\theta > 0)$$

$$= \frac{1}{1 - t\cos\theta}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1 + i\left(\frac{t\sin\theta}{1 - t\cos\theta}\right)\cos u}{1 + \left(\frac{t\sin\theta}{1 - t\cos\theta}\right)^2\cos^2 u}du$$

$$= \frac{1}{1 - t\cos\theta}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{1 + \left(\frac{t\sin\theta}{1 - t\cos\theta}\right)^2\cos^2 u}du + i\frac{1}{1 - t\cos\theta}\frac{t\sin\theta}{1 - t\cos\theta}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos u}{1 + \left(\frac{t\sin\theta}{1 - t\cos\theta}\right)^2\cos^2 u}du \quad (*).$$

• D'après la question 29, pour tout $a > 0$, $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos u}{1 + a^2\cos^2 u}du = 0$, donc, comme $u \mapsto \dfrac{\cos u}{1 + a^2\cos^2 u}$ est paire,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos u}{1 + a^2\cos^2 u}du = 2\int_0^\pi \frac{\cos u}{1 + a^2\cos^2 u}du = 0.$$

• D'après la question 30, pour tout $a > 0$, $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + a^2\cos^2 u}du = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$, donc, comme $u \mapsto \dfrac{1}{1 + a^2\cos^2 u}$ est paire,

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos u}{1 + a^2\cos^2 u}du = 2\int_0^{\pi/2} \frac{\cos u}{1 + a^2\cos^2 u}du = \pi\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Enfin, $u \mapsto \dfrac{1}{1 + a^2\cos^2 u}$ est $\pi$-périodique, donc

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos u}{1 + a^2\cos^2 u}du &= \int_{-\pi}^{0} \frac{\cos u}{1 + a^2\cos^2 u}du + \int_{0}^{\pi} \frac{\cos u}{1 + a^2\cos^2 u}du \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos u}{1 + a^2\cos^2 u}du + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos u}{1 + a^2\cos^2 u}du \\
&= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos u}{1 + a^2\cos^2 u}du = 2\pi\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}.
\end{aligned}$$

*car si $f$ est $T$-périodique, alors pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_b^{b+T} f(t)dt$.*

• Alors, en posant $a = \dfrac{t\sin\theta}{1 - t\cos\theta} > 0$ (car $|t\cos\theta| < 1$), et en réinjectant dans $(*)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \frac{du}{1 - t\cos\theta - it\sin\theta\cos u} &= \frac{1}{1-t\cos\theta}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{1 + a^2\cos^2 u}du + i\frac{1}{1-t\cos\theta}\frac{t\sin\theta}{1-t\cos\theta}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos u}{1 + a^2\cos^2 u}du}_{=0} \\
&= \frac{1}{1-t\cos\theta}2\pi\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{t\sin\theta}{1-t\cos\theta}\right)^2}} \\
&= 2\pi\frac{1}{\sqrt{(1-t\cos\theta)^2 + t^2\sin^2\theta}} \\
&= 2\pi\frac{1}{\sqrt{1 - 2t\cos\theta + t^2}}.
\end{aligned}$$

32. Soit $\theta \in [0, \pi]$.

$x = \cos(\theta) \in [-1, 1]$, donc, pour tout $t \in \left]-\dfrac{1}{r}, \dfrac{1}{r}\right[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} L(\cos\theta)t^n = \frac{1}{\sqrt{t^2 - 2t\cos\theta + 1}}$ d'après la question 25.

D'après les questions 28 et 31, pour tout $t \in ]-1, 1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n(\theta)t^n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{du}{1 - t\cos\theta - it\sin\theta\cos u} = \frac{1}{\sqrt{t^2 - 2t\cos\theta + 1}}.$$

• D'où, par unicité du développement en série entière de $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t^2 - 2t\cos\theta + 1}}$ sur $\left]-\dfrac{1}{r}, \dfrac{1}{r}\right[ \subset ]-1, 1[$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad L_n(\cos\theta) = w_n(\theta).$$

33. Par suite, pour tout $x \in [-1, 1]$, en posant $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\cos\theta = x$, on a, pour tout $t \in ]-1, 1[$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{t^2 - 2xt + 1}} &= \frac{1}{\sqrt{t^2 - 2t\cos\theta + 1}} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} w_n(\theta)t^n \quad \text{(d'après les question 31 et 28)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} L(\cos\theta)t^n \quad \text{(d'après la question 32)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)t^n \quad \text{(par définition de } \theta\text{)}.
\end{aligned}$$

34. • D'après la question précédente, on a $R(x) \geq 1$.
• Supposons $R(x) > 1$.

Le rayon de convergence de $z \in \mathbb{C} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x) z^n$ est $R(x) > 1$.

Le rayon de convergence de $z \in \mathbb{C} \mapsto z^2 - 2xz + 1$ est $+\infty$ (c'est un polynôme, que l'on voit comme une série entière).

Par produit de Cauchy de séries entières, $z \mapsto (z^2 - 2tz + 1)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x) z^n\right)^2$ est une série entière de rayon de convergence $\geq R(x)$, donc il existe une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^n$ (comme somme et produit de nombres réels dans le produit de Cauchy) telle que,

$$\forall z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| < R(x), \quad (z^2 - 2xz + 1)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x) z^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

En particulier, pour tout $t \in ]-R(x), R(x)[$, $(t^2 - 2xt + 1)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x) t^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n$.

Or, pour tout $t \in ]-1, 1[$, $(t^2 - 2xt + 1)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x) t^n\right)^2 = 1$ d'après la question précédente.

Or 1 est son propre développement en série entière, de rayon de convergence $+\infty$, donc, par unicité du développement en série entière sur $]-1, 1[$ de $t \mapsto (t^2 - 2xt + 1)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x) t^n\right)^2$, on a

$$b_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1,\ b_n = 0.$$

On a donc, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R(x)$, $(z^2 - 2xz + 1)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x) z^n\right)^2 = 1$.

Or, en posant $x = \cos\theta$ (possible car $x \in [-1, 1]$), $z^2 - 2xz + 1 = 0$ a pour solutions :

$$z_1 = \frac{2\cos\theta + 2i\sin\theta}{2} = e^{i\theta} \quad \text{et} \quad z_2 = e^{-i\theta} \quad (\text{car } \Delta = 4\cos^2(\theta) - 4 = (2i\sin\theta)).$$

Par suite, pour $z = e^{i\theta}$, on a $|z| < R(x)$ (car on a supposé $R(x) > 1$) et $\underbrace{(z^2 - 2xz + 1)}_{=0}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x) z^n\right)^2 = 0$.

C'est exclu, donc, par l'absurde, $R(x) \leq 1$.
• On a donc $R(x) \leq 1$ et $R(x) \geq 1$, donc $R(x) = 1$.

# Partie VI - Application à l'approximation d'intégrales

35. Montrons par récurrence que, pour tout $n \geq 2$ "si $f$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle qu'il existe $n$ réels $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$ tels que $\forall i \in [\![1, n]\!], h(\alpha_i) = 0$, alors il existe un réel $c$ tel que $f^{(n-1)}(c) = 0$" $(HR_n)$
**Initialisation** Pour $n = 2$, $f$ est supposée continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[\alpha_1, \alpha_2]$. En appliquant le théorème de Rolle, on obtient l'existence de $c \in ]\alpha_1, \alpha_2[ \subset \mathbb{R}$ tel que $f^{(1)}(c) = 0$. On a donc bien $HR_2$.
**Hérédité :** Soit $n \geq 2$ et supposons $HR_n$ vérifée.
Soit alors une fonction $f$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et $\alpha_1, ..., \alpha_{n+1}$ $n+1$ réels en lesquels $f$ s'annulle.
Alors, en appliquant le théorème de Rolle à $f$ sur chaque intervalle $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$, on obtient l'existence de $n$ réels distincts $\beta_1 < \cdots < \beta_n$ en lesquels $f'$ s'annulle, avec $f'$ fonction de classe $\mathcal{C}^{n-1}$.
En appliquant $HR_n$ à $f'$, on obtient l'existence d'un $c \in \mathbb{R}$ tel que $(f')^{(n-1)}(c) = 0$, et donc $f^{(n)}(c) = 0$.
On a bien $HR_{n+1}$.
**Conclusion :** La propriété est donc établie par récurrence.
Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2n \geq 2$, donc on a $HR_{2n}$, qui n'est autre que la propriété à démontrer.

36. Soit $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$.
Si $\sum_{i=1}^{n} a_i \ell_i = 0$, alors, pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\sum_{i=1}^{n} a_i \ell_i(P) = 0$.

Soit, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $P_j = \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} (X - x_i) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \ell_i(P_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i \underbrace{P_j(x_i)}_{=0 \text{ si } i\neq j} = a_j P_j(x_j),$$

donc, comme $\sum_{i=1}^{n} a_i \ell_i(P) = 0$, on a $a_j P_j(x_j) = 0$, donc $a_j = 0$ car $P_j(x_j) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \underbrace{(x_j - x_i)}_{\neq 0} \neq 0$ (car les $x_i$ sont deux à deux distincts).
Ceci étant valable pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on a bien la liberté.

37. La famille $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$ est donc libre.
De plus, elle est formée de $n$ éléments de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_{n-1}[X], \mathbb{R})$, espace vectoriel de dimension $n$, donc c'est une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_{n-1}[X], \mathbb{R})$.
Par suite, pour toute application linéaire $\psi$ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}$, il existe un unique $n$-uplet $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ de réels tel que : $\psi = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \ell_k$.

38. $\varphi : P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \mapsto \int_{-1}^{1} P(t)dt$ est une application linéaire (par linéarité de l'intégrale) de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}$.
Donc, d'après la question précédente, il existe un unique $n$-uplet $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de réels tel que $\varphi = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \ell_k$, ie

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \int_{-1}^{1} P(t)dt = \varphi(P) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \ell_k(P) = \alpha_1 P(x_1) + \cdots + \alpha_n P(x_n).$$

39. • Pour tout $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, il existe un unique couple $(Q, R)$ avec $\deg(R) < \deg(L_n) = n$ tel que $P = QL_n + R$.
De plus, comme $QL_n = P - R$ où $\deg(L_n) = n$ et $\deg(P - R) \leq 2n - 1$, on a $\deg(Q) \leq n - 1$, donc $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Alors, en reprenant le $n$-uplet $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ trouvé à la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} P(t)dt &= \int_{-1}^{1} Q(t)L_n(t)dt + \int_{-1}^{1} R(t)dt \\
&= \langle Q, L_n \rangle + \int_{-1}^{1} R(t)dt \quad \text{(par définition du produit scalaire introduit en partie III)} \\
&= 0 + \int_{-1}^{1} R(t)dt \quad \text{(d'après la question 18 avec } Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]) \\
&= \alpha_1 R(x_1) + \cdots + \alpha_n R(x_n) \quad \text{(car } R \in \mathbb{R}_{n-1}[X])
\end{aligned}$$

et, comme pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P(x_i) = Q(x_i) \underbrace{L_n(x_i)}_{=0} + R(x_i) = R(x_i)$, on a bien

$$\int_{-1}^{1} P(t)dt = \alpha_1 R(x_1) + \cdots + \alpha_n R(x_n) = \alpha_1 P(x_1) + \cdots + \alpha_n P(x_n).$$

40. • Soit $\varphi : P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X] \mapsto (P(x_1, \ldots, P(x_n), P'(x_1), \ldots, P'(x_n))$.
C'est une application linéaire (dit dans l'énoncé).
Soit $P \in \ker(\varphi)$. Alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P(x_i) = P'(x_i) = 0$, donc $x_i$ est une racine au moins double de $P$.
Comptées avec multiplicité, $P$ admet donc au moins $2n$ racines, donc, comme $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, on a $P = 0$.
$\varphi$ est donc injective.
• D'après le théorème du rang, on a alors

$$\dim \operatorname{Im} \varphi = \dim \mathbb{R}_{2n-1}[X] - \dim \ker \varphi = 2n = \dim \mathbb{R}^{2n}$$

et $\operatorname{Im} \varphi \subset \mathbb{R}^{2n}$, donc $\operatorname{Im} \varphi = \mathbb{R}^{2n}$ et $\varphi$ est donc surjective.
• $\varphi$ est injective et surjective, donc bijective.
• Par suite, pour tout $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$,

$$\begin{aligned}
\left( \forall i \in [\![1, n]\!], \ \begin{cases} P(x_i) = f(x_i) \\ P'(x_i) = f'(x_i) \end{cases} . \right) &\Leftrightarrow \varphi(P) = (f(x_1), \ldots, f(x_n), f'(x_1), \ldots, f'(x_n)) \\
&\Leftrightarrow P = \varphi^{-1}(f(x_1), \ldots, f(x_n), f'(x_1), \ldots, f'(x_n)),
\end{aligned}$$

ce qui assure l'existence et l'unicité de $H_n$.

41. Soit $x \in [-1, 1]$ tel que : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x \neq x_i$.
Soit $g : t \in [-1, 1] \mapsto f(t) - H_n(t) - \frac{A_n(t)^2}{(2n)!} \times \underbrace{\frac{(2n)!}{A_n(x)^2}(f(x) - H_n(x))}_{=K}$.

$g$ est bien définie car $A_n(x) = \prod_{i=1}^{n} \underbrace{(x - x_i)}_{\neq 0} \neq 0$.

On renumérote $(x_1, \ldots, x_n, x)$ en $(y_1, \ldots, y_{n+1})$ de telle sorte que $y_1 < \cdots < y_{n+1}$.
Alors, comme

– $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $g(x_i) = \underbrace{f(x_i) - H_n(x_i)}_{=0} - \dfrac{\overbrace{A_n(x_i)^2}^{=0}}{(2n)!} \times K = 0$

– et $g(x) = f(x) - H_n(x) - \dfrac{A_n(x)^2}{(2n)!} \times \dfrac{(2n)!}{A_n(x)^2}(f(x) - H_n(x)) = 0$,

on a $g(y_i) = 0$ pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$.
$g$ est de classe $\mathcal{C}^{2n}$ sur $[-1, 1]$, donc, comme $n \geq 1$, $g$ est continue et dérivable sur $[-1, 1]$, donc sur $[y_i, y_{i+1}]$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
D'après le théorème de Rolle, appliqué sur chaque intervalle, il existe $n$ réels $\beta_1, \ldots, \beta_n$ tels que

$$y_1 < \beta_1 < y_2 < \ldots < \beta_n < y_{n+1} \quad \text{et} \quad g'(\beta_i) \text{ pour tout } i \in [\![1, n]\!].$$

Par construction, la famille $\beta_1, \ldots, \beta_n, x_1, \ldots, x_n)$ est formée de $2n$ éléments de $[-1, 1]$ deux à deux distincts.
De plus, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,
– $g'(\beta_i) = 0$

– et $g'(x_i) = \underbrace{f'(x_i) - H_n'(x_i)}_{=0} - \dfrac{2A_n'(x_i)\overbrace{A_n(x_i)}^{=0}}{(2n)!}K = 0$,

donc $g'$ s'annule (au moins) $2n$ fois sur $[-1, 1]$ et, comme
– $f'$ est de classe $\mathcal{C}^{2n-1}$ sur $[-1, 1]$ (car $f$ est de classe $\mathcal{C}^{2n}$)
– et $H_n'$ $A_n$ et $A_n'$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ (ce sont des fonctions polynomiales),
$g'$ est de classe $\mathcal{C}^{2n-1}$ sur $[-1, 1]$.
D'où, d'après la question 35, adaptée sans difficulté à une fonction de $[-1, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, il existe $c \in [-1, 1]$ tel que $(g')^{(2n-1)}(c) = 0 \Leftrightarrow g^{(2n)}(c) = 0$.
Or, $g^{(2n)} = f^{(2n)} - H_n^{(2n)} - \dfrac{(A_n^2)^{(2n)}}{(2n)!}K$, où
– $H_n^{(2n)} = 0$ car $H_n \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$
– et $(A_n^2)^{(2n)} \in \mathbb{R}_0[X]$ (car $\deg(A_n^2) = 2n$), et une récurrence similaire à celle de la question 2, poussée jusqu'à $k = 2n$, donne $A_n^{(2n)} = (2n)!$,
donc $g^{(2n)}(c) = f^{(2n)}(c) - K$, et donc

$$K = f^{(2n)}(c) \Leftrightarrow \frac{(2n)!}{A_n(x)^2}(f(x) - H_n(x)) = f^{(2n)}(c) \Leftrightarrow f(x) = H_n(x) + \frac{A_n(x)^2}{(2n)!}f^{(2n)}(c).$$

42. Pour tout $y \in [-1, 1]$,
– si $y \neq x_i$, alors $c$ existe d'après la question précédente
– si $y = x_i$, alors $f(y) - H_n(y) = 0$ et $A_n(y) = 0$, donc $c$ quelconque dans $[1, 1]$ convient.

43. • $f^{(2n)}$ est continue sur le segment $[-1, 1]$, donc elle est bornée et atteint ses bornes sur $[-1, 1]$, donc $M_{2n}(f) = \max_{t \in [-1,1]} |f^{(2n)}(t)|$ existe.
• Reprenons $H_n$ comme à la question 40. Alors

$$\begin{aligned}\left|\int_{-1}^{1} f(t)dt - (\alpha_i f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n))\right| &= \left|\int_{-1}^{1} f(t)dt - \int_{-1}^{1} H_n(t)dt\right| \quad \text{(d'après la question 39 avec } H_n \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]) \\ &= \left|\int_{-1}^{1} f(t) - H_n(t)dt\right|\end{aligned}$$

Or, pour tout $t \in [-1, 1]$, il existe $c_t \in [-1, 1]$ tel que

$$|f(t) - H_n(t)| = \left|\frac{A_n(t)^2}{(2n)!}f^{(2n)}(c_t)\right| \leq \frac{A_n(t)^2}{(2n)!} \times M_{2n}(f),$$

donc, par positivité de l'intégrale (avec $-1 \leq 1$),

$$\begin{aligned}\left|\int_{-1}^{1} f(t)dt - (\alpha_i f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n))\right| &= \left|\int_{-1}^{1} f(t) - H_n(t)dt\right| \\ &\leq \int_{-1}^{1} \frac{A_n(t)^2}{(2n)!}M_{2n}(f)dt = \frac{M_{2n}(f)}{(2n)!}\int_{-1}^{1} A_n(t)^2 dt.\end{aligned}$$

44. Par définition de $A_n$,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} A_n(t)^2 dt &= \frac{1}{a_n^2}\langle L_n, L_n\rangle = \frac{1}{a_n^2}\frac{2}{2n+1} \quad \text{(admis en question 9)}\\
&= 2^{2n}\frac{(n!)^4}{((2n)!)^2}\frac{2}{2n+1} \sim 2^{2n}\frac{\left(\frac{n}{e}\right)^{4n}\sqrt{2\pi n}^4}{\left(\frac{2n}{e}\right)^{4n}\sqrt{2\pi 2n}^2}\frac{1}{n} \quad \left(\text{Stirling : } n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\right)\\
&= 2^{2n}\frac{4\pi^2 n^2}{2^{4n}4\pi n}\frac{1}{n} = \frac{\pi}{4^n}.
\end{aligned}$$