Mathématiques II Centrale PSI 2018

I Moments d'une variable aléatoire

Q1 Selon que $0 \leqslant X \leqslant 1$ ou $X \geqslant 1$, on aura $X^k \leqslant 1$ ou $X^k \leqslant X^n$. Dans les deux cas, $\boxed{\forall k \in [\![1, n]\!],\ 0 \leqslant X^k \leqslant 1 + X^n.}$

Q2 On sait que l'existence d'une espérance pour Y (v.a. positive) entraîne l'existence d'une espérance pour tout X telle que $|X| \leqslant Y$. On en déduit par la majoration précédente que, si X admet un moment d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$), alors X admet des moments d'ordre k pour tous $k \in [\![1, n-1]\!]$.

I.A - Fonction génératrice des moments

Q3 $m_n(X)$ s'obtient par la dérivée $n^{\text{ème}}$ en 0 de M – c'est le principe d'identification des séries entières.

Q4 Pour que la variable aléatoire e^{tX} admette une espérance, il faut que

$$\sum_{n\geqslant 0} |e^{tx_n}| \mathcal{P}(X = x_n) = \sum_{n\geqslant 0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k x_n^k}{k!} \mathcal{P}(X = x_n) \text{ converge.}$$

Or on reconnaît dans $M_X(t)$ une série double, sommable car tout est positif et convergent : en remplaçant (théorème de transfert) $m_n(t)$ par $\sum_{p=0}^{\infty} P(X = x_p) x_p^n$, il vient

$$M_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} m_n(X) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n\geqslant 0} \sum_{p=0}^{\infty} P(X = x_p) x_p^n \frac{t^n}{n!}$$

et (en changeant de notations) par le théorème de Fubini il vient bien que $\boxed{M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}).}$

Q5 Réciproquement, s'il existe un réel $R > 0$ tel que, pour tout $t \in]-R, R[$, la variable aléatoire e^{tX} admet une espérance, alors pour tout $t \in]-R, R[$ on a la sommabilité qui permet le calcul précédent, dont le résultat reste valide.
Donc l'ensemble de définition de la fonction génératrice des moments de X contient $]-R, R[$ et pour tout $t \in]-R, R[$, $M_X(t)$ est encore égal à $\mathbb{E}(e^{tX})$.

Q6 Montrons que la variable aléatoire $X + Y$ admet des moments de tous ordres. Comme

$$(X + Y)^p = \sum_{n=0}^{p} \binom{p}{n} X^n Y^{p-n}$$

où les v.a. X^n et Y^{p-n} sont indépendantes (lemme des coalitions), d'espérance finie (par hypothèse), leurs produits ont aussi une espérance qui est le produit des espérances d'où enfin par linéarité :

$$\mathbb{E}\big((X + Y)^p\big) = \sum_{n=0}^{p} \binom{p}{n} \mathbb{E}(X^n)\mathbb{E}(Y^{p-n}) = \sum_{n=0}^{p} \binom{p}{n} m_n(X) m_{p-n}(Y).$$

Pour conclure, la famille des $\binom{p}{n} m_n(X) m_{p-n}(Y) \frac{t^p}{p!}$ (où on convient que $\binom{p}{n} = 0$ si $p < n$) est sommable pour t de valeur absolue $< \text{Min}(R_X, R_Y)$ puisque par sommation par tranches il vient

$$\begin{aligned}\sum_{p\geqslant 0} \sum_{n=0}^{p} \binom{p}{n} m_n(X) m_{p-n}(Y) \frac{t^p}{p!} &= \sum_{p\geqslant 0} \sum_{n=0}^{p} \frac{m_n(X)}{n!} t^n \frac{m_{p-n}(Y)}{(p-n)!} t^{p-n} \\ &= \sum_{n,k\geqslant 0} \frac{m_n(X)}{n!} t^n \frac{m_k(Y)}{k!} t^k = \sum_{n\geqslant 0} \frac{m_n(X)}{n!} t^n \sum_{k\geqslant 0} \frac{m_k(Y)}{k!} t^k\end{aligned}$$

autrement dit

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t) \times M_Y(t).$$

(c'est le produit de Cauchy des deux séries entières)

I.B - Exemples

Q7 Z vérifie $\mathcal{P}(Z=n)=e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}$. Par croissance comparée (à $1/n^2$), Z admet des moments de tous ordres qui valent

$$m_p(Z)=\sum_{n\geqslant 0} e^{-\lambda}\frac{n^p\lambda^n}{n!}.$$

Q8 La fonction génératrice des moments de Z est (interversion justifiée par sommabilité)

$$\sum_{p\geqslant 0} m_p(Z)\frac{t^p}{p!}=\sum_{p\geqslant 0}\sum_{n\geqslant 0} e^{-\lambda}\frac{n^p\lambda^n}{n!}\frac{t^p}{p!}=e^{-\lambda}\sum_{n\geqslant 0}\frac{\lambda^n}{n!}\sum_{p\geqslant 0}\frac{n^pt^p}{p!}=e^{-\lambda}\sum_{n\geqslant 0}\frac{\lambda^n}{n!}e^{nt}=e^{-\lambda}e^{\lambda e^t}=e^{\lambda(e^t-1)}.$$

On en déduit les valeurs de $m_1(Z)$ et $m_2(Z)$ par dérivation (**Q3**) :

$$M_Z(t)'=\lambda e^te^{\lambda(e^t-1)},\quad M_Z(t)''=(\lambda e^t+\lambda^2e^{2t})e^{\lambda(e^t-1)}\qquad m_1(Z)=m_Z'(0)=\lambda,\quad m_2(Z)=\lambda+\lambda^2.$$

On retrouve (pour vérifier !) espérance et variance de la loi de Poisson.

Q9 Pour calculer la fonction génératrice des moments de la variable aléatoire S_n, on pourrait utiliser **Q6**, mais avec la somme de n v.a. indépendantes.
Autrement : la loi de S_n est une loi binomiale $\mathcal{B}(n,\lambda/n)$, avec $\mathcal{P}(S_n=k)=\binom{n}{k}(\frac{\lambda}{n})^{n-k}(1-\frac{\lambda}{n})^k$.
On en déduit le moment

$$m_p(S_n)=\sum_{k=0}^{n}k^p\binom{n}{k}(\frac{\lambda}{n})^{n-k}(1-\frac{\lambda}{n})^k,$$

et la FGdM :

$$M_{S_n}(t)=\sum_{p\geqslant 0}\sum_{k=0}^{n}k^p\binom{n}{k}(\frac{\lambda}{n})^k(1-\frac{\lambda}{n})^{n-k}\frac{t^p}{p!}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\frac{\lambda}{n})^k(1-\frac{\lambda}{n})^{n-k}\sum_{p\geqslant 0}k^p\frac{t^p}{p!}$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\frac{\lambda}{n})^k(1-\frac{\lambda}{n})^{n-k}e^{kt}=\big(1-\frac{\lambda}{n}+\frac{\lambda e^t}{n}\big)^n.$$

Q10 $\lim\limits_{n\to+\infty}M_{S_n}(t)=e^{\lambda(e^t-1)}$ à t fixé en prenant le logarithme, puis l'exponentielle (par continuité de ces fonctions).

Q11 La question 8 donnait le même résultat... on sait que S_n tend vers la loi de Poisson de paramètre λ en un sens (« en loi »), c'est sa définition.

Q12 On a $\mathcal{P}(Y_n=\frac{k}{n})=\frac{1}{n}$.

D'où le calcul du moment d'ordre p : $m_p=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\big(\frac{k}{n}\big)^p$, et la fonction génératrice des moments de la variable aléatoire Y_n :

$$M_{Y_n}(t)=\sum_{p\geqslant 0}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\big(\frac{k}{n}\big)^p\frac{t^p}{p!}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{p\geqslant 0}\frac{1}{p!}\big(\frac{tk}{n}\big)^p=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{t\,k/n}.$$

Q13 On reconnait une somme de Riemann : il vient donc à t fixé $\lim\limits_{n\to+\infty}M_{Y_n}(t)=\displaystyle\int_0^1 e^{tx}\,dx=\frac{e^t-1}{t}$, qui fait figure de FGdM de la distribution uniforme sur le segment $[0,1]$ (hors-programme).

II. Moments d'une suite numérique

II.A - Étude d'une fonction

Q14 φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ comme composée de fonctions $\mathcal{C}^\infty$. Quand x tend vers 1 par valeurs inférieures, on a $\varphi(x)\to 0$ par limite de l'exponentielle en $-\infty$, donc on a même limite à gauche et à droite en 1, et φ est continue sur $\mathbb{R}$.

Q15 Déjà on a le plaisir de calculer

$$\varphi'(x)=\exp\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x}}\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{1-x}}-\frac{x}{(1-x)^{3/2}}\right)=-\frac{\varphi(x)}{(1-x)^{3/2}}$$

L'exponentielle tend vers 0 bien plus vite que $(1-x)^{3/2}$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\varphi'(x)=0$ [rigoureusement il faudrait poser $y=\sqrt{1-x}$ pour se ramener à une croissance comparée classique].

La limite à droite est clairement 0 aussi, donc par le théorème de la dérivée prolongée (la fonction est continue, $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en 1 et sa dérivée y a une limite), φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Q16 On montre que, pour tout entier naturel non nul p, il existe deux polynômes P_p et Q_p à coefficients réels tels que, pour tout $x\in]-\infty,1[$,

$$\varphi^{(p)}(x)=\frac{P_p(\sqrt{1-x})}{Q_p(\sqrt{1-x})}\exp\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x}}\right)=R_p(\sqrt{1-x})\exp\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x}}\right)$$

par une récurrence immédiate :

- C'est vrai pour $p=1$ (et même $p=0$) comme on l'a prouvé,
- Supposant la propriété vraie, en dérivant on va obtenir du $\frac{1}{(1-x)^{3/2}}$ en dérivant l'exponentielle et une autre fraction rationnelle de la variable $\sqrt{1-x}$ en dérivant la fraction $R_p(\sqrt{1-x})$ par dérivation de fonctions composées.

Q17-18 On en déduit comme en **Q15** que le théorème de la dérivée prolongée s'applique (supposant par récurrence que φ est de classe $\mathcal{C}^{p-1}$ à la dérivée d'ordre p, car $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\varphi^{(p)}(x)=0$ par croissance comparée, pour tout $p\in\mathbb{N}^*$ et donc $\varphi^{(p)}(1)$ existe et vaut 0.

II.B - Développements en série

Q19 Par le développement en série entière de l'exponentielle, il vient

$$\varphi(x)=\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{1}{q!}\frac{(-x)^q}{\sqrt{1-x}^q}=\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{(-1)^q}{q!}x^q(1-x)^{-q/2}.$$

Q20 D'après la formule du binôme de Newton, la vraie, la généralisée, on a

$$\begin{aligned}(1-x)^{-q/2}&=\sum_{p\geqslant 0}\binom{-q/2}{p}(-x)^p=\sum_{p\geqslant 0}\frac{(-q/2)(-q/2-1)\dots(-q/2-p+1)}{p!}(-1)^px^p\\&=\sum_{p\geqslant 0}\frac{(q/2+p-1)\dots(q/2+1)q/2}{p!}x^p\end{aligned}$$

Donc, pour tout $x\in]-1,1[$ et tout $q\in\mathbb{N}^*$, on a

$$(1-x)^{-q/2}=\sum_{p=0}^{+\infty}H_p\left(\frac{q}{2}+p-1\right)x^p.$$

Q21 On a en combinant

$$\varphi(x) = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{(-1)^q}{q!} x^q (1-x)^{-q/2} = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{(-1)^q}{q!} x^q \sum_{p=0}^{+\infty} H_p\left(\frac{q}{2}+p-1\right) x^p = \sum_{p,q\geqslant 0} \frac{(-1)^q}{q!} H_p\left(\frac{q}{2}+p-1\right) x^{p+q}.$$

En isolant les termes d'indice $q=0$ dont la contribution vaut $\frac{(-1)^0}{0!}x^0(1-x)^0 = 1$, et en posant $q = i+1$ sinon, on trouve bien

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \varphi(x) = 1 + \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j}(x)\right) \text{ où l'on a posé } \forall (i,j)\in\mathbb{N}^2, \quad a_{i,j}(x) = \frac{(-1)^{i+1}}{(i+1)!} H_j\left(\frac{i-1}{2}+j\right) x^{i+j+1}.$$

Q22 Observons déjà que $H_j\left(\frac{i-1}{2}+j\right) \geqslant 0$ puisque i et j sont $\geqslant 0$ (le dernier terme du numérateur est $\frac{i+1}{2}$).
Si x est positif, on a donc $|a_{i,j}(x)| = (-1)^{i+1} a_{i,j}(|x|)$.
Si x est négatif, on a donc $|a_{i,j}(x)| = (-1)^j a_{i,j}(|x|) = (-1)^{i+1} a_{i,j}(x) = (-1)^{i+1} a_{i,j}(-|x|)$.
En reprenant tout le calcul avec $\left(\frac{|x|}{\sqrt{1-|x|}}\right)$, on trouve que le $(-1)^q x^q$ (alias $(-1)^{i+1}$) se simplifie en $|x^q|$, tandis que les x^p (qui proviennent du DSE de la racine) se changent en $|x|^p$.
Quand la poussière retombe, pour tout $x \in]-1,1[$, il reste effectivement

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} |a_{i,j}(x)|\right) = \exp\left(\frac{|x|}{\sqrt{1-|x|}}\right) - 1.$$

Q23 On vient de démontrer une sommabilité, ce qui autorise à Fubiniser : en sommant à $i+j+1 = n$ (produit de Cauchy), le terme constant étant toujours mis de côté, il vient

$$H_j\left(\frac{i-1}{2}+j\right) = H_j\left(\frac{n+j}{2}-1\right) \qquad \text{d'où} \qquad \forall x \in]-1,1[, \quad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

où

$$\boxed{\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} H_k\left(\frac{n+k}{2}-1\right) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}} \tag{1}$$

II.C - Un prolongement dans $\mathbb{C}$

Q24 La sommabilité établie en **Q22** montre que, pour tout $z \in \mathcal{D}$, la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge.

Q25 Le théorème de dérivation terme à terme des séries entières affirme que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]-1,1[$, $\Phi_p(x) = \varphi^{(p)}(x)$ et que les séries entières gardent le même rayon de convergence (ici 1) après dérivation. En particulier, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $z \in \mathcal{D}$, la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+p)(n+p-1)\cdots(n+1) a_{n+p} z^n$ converge.

Q26 Rappelons que la fonction $\varphi^{(p)}$ s'exprime sous la forme $R_p(\sqrt{1-x})\exp\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x}}\right)$ pour $x < 1$ (et 0 pour $x \geqslant 1$!). Or cette fonction est continue sur $[-1,1]$, donc y est bornée (limite nulle en 1).
Donc Φ_p est bornée sur $]-1,1[$ car c'est la même !
On admet gentiment que la fonction Φ_p est bornée sur $\mathcal{D}$.

Q27 Soit r un réel de l'intervalle $]0,1[$. On sait alors que la série entière

$$\sum_n (n+p)(n+p-1)\cdots(n+1)a_{n+p}r^n e^{ni\theta}$$

converge normalement pour $\theta \in \mathbb{R}$, car $r < R$ rayon de convergence (on est sur un cercle – compact – inclus dans le disque ouvert de convergence).
Ceci autorise à intégrer terme à terme le développement en série de $\Phi_p(re^{i\theta})e^{-ni\theta}$ sur le segment $[0,2\pi]$. Or $\int_0^{2\pi}(re^{i\theta})^k e^{-ni\theta}d\theta = 0$ quand $k \neq n$, il reste donc

$$(n+p)(n+p-1)\cdots(n+1)a_{n+p}r^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi_p(re^{i\theta})e^{-ni\theta}d\theta.$$

Q28 On a donc compte tenu de ce que $|\Phi_p|$ est bornée par une constante K_p (admis en **Q26**)

$$\forall r \in]0,1[\qquad |a_{n+p}|r^n \leqslant \frac{1}{(n+p)(n+p-1)\cdots(n+1)}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}K_p d\theta \leqslant \frac{K_p}{n^p}$$

et en faisant tendre r vers 1 on a l'inégalité voulue par passage à la limite.

Q29 La convergence normale de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ sur $[0,1]$ résulte de la majoration précédente.
On a donc convergence uniforme et continuité de la somme de la série entière, et donc la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ est la limite en 1 de φ, qui est 0 d'après **Q14**.

Q30 En **Q28** nous avons établi que $a_{n+p} = O(\frac{1}{n^p})$. Par réindexation ($p$ étant fixé) cela prouve que $a_n = O(\frac{1}{(n-p)^p}) = O(\frac{1}{n^p})$. On a donc une convergence vers 0 plus rapide que n'importe quelle série de Riemann. En particulier, pour $p \in \mathbb{N}^*$ on $a_n = O(\frac{1}{n^{p+42}})$ et $(n+p)(n+p-1)\cdots(n+1)a_{n+p} = O(\frac{1}{n^{42}})$. On en déduit la convergence normale de la série entière $\sum_{n\geqslant 0}(n+p)(n+p-1)\cdots(n+1)a_{n+p}x^n$ sur $[0,1]$. **On ne peut appliquer le théorème de dérivation des séries entières sur $[0,1]$** (seulement sur $[-1,1[$) mais la convergence normale, donc uniforme, permet d'appliquer la version récursive du théorème de dérivation terme à terme, ce qui donne pour somme de cette série

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+p)(n+p-1)\cdots(n+1)a_{n+p}x^n = \varphi^{(p)}(x) = \Phi_p(x)$$

et en particulier

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+p)(n+p-1)\cdots(n+1)a_{n+p} = \Phi_p(1) = 0 \quad \text{d'après } \textbf{Q18}.$$

Q31 On en déduit par récurrence aisée que que tous les moments d'ordre p de la suite (a_n) sont nuls. Je me contente d'ébaucher la récurrence :

$$m_0 = \sum_{n\geqslant 0} a_n = 0 \qquad \text{(d'après } \textbf{Q29}\text{)}$$

$$\underbrace{\sum_{n\geqslant 0}(n+1)a_n}_{\text{(d'après } \textbf{Q30}\text{)}} = 0 = \sum_{n\geqslant 0} na_n + \sum_{n\geqslant 0} a_n = m_1 + m_0 \quad \Rightarrow \quad m_1 = 0$$

$$\underbrace{\sum_{n\geqslant 0}(n+2)(n+1)a_n}_{\text{(d'après } \textbf{Q30}\text{)}} = 0 = \sum_{n\geqslant 0} n^2 a_n + \sum_{n\geqslant 0} 3na_n + \sum a_n = m_2 + 3m_1 + 2m_0 \quad \Rightarrow \quad m_2 = 0\ldots$$

III. Moments d'une fonction

III.A - Étude d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$

Q32 On a $|\theta(x)| = \exp\left(-\frac{\ln^2 x}{4\pi^2}\right)$ où $-\ln^2(x) \to -\infty$ et donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} |\theta(x)| = 0$.

Q33 θ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ comme composée de fonctions $\mathcal{C}^\infty$.
On démontre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ qu'il existe $P_n \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$\forall x \in]0, +\infty[\qquad \theta^{(n)}(x) = \frac{P_n(\ln x)}{x^n}\theta(x) :$$

- C'est vrai pour $n = 0$ avec $P = 1$!
- Supposons l'hypothèse de récurrence vérifiée pour le rang n, alors

$$\theta^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{P_n(\ln x)}{x^n}\theta(x)\right) = \frac{P_n'(\ln x)}{xx^n}\theta(x) - \frac{nP_n(\ln x)}{x^{n+1}}\theta(x) + \frac{P_n(\ln x)}{x^n}\theta'(x)$$

et comme $\theta'(x) = \dfrac{\frac{-\ln x}{2\pi^2} + \frac{i}{2\pi}}{x}\theta(x) = \frac{P_1(\ln x)}{x}\theta(x)$, on récupère bien

$$\theta^{(n+1)}(x) = \left(\frac{P_{n+1}(\ln x)}{x^n}\theta(x)\right).$$

(avec $P_{n+1} = P_n' - nP_n + P_1P_n$, mais quelle importance ?)

Q34 Effectuons le changement de variable $y = -\ln x$. On a alors $y \to +\infty$ quand $x \to 0^+$, et

$$\theta^{(n)}(x) = P_n(-y)e^{ny}\exp\left(-\frac{y^2}{4\pi^2} - i\frac{y}{2\pi}\right) \to 0 \text{ quand } y \to +\infty \text{ par croissance comparée.}$$

En effet $e^{-y^2/4\pi^2}$ est imbattable !

Q35 Comme ci-dessus, (**Q18**) on en déduit par le théorème de la dérivée prolongée que θ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

III.B - Étude d'une intégrale

Q36

L'intégrale $I_p = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-p\pi)^2}\sin t\,dt$ est absolument convergente car l'intégrande, continu, est dominé en $\pm\infty$ par $1/t^2$ par croissance comparée. Ceci autorise le changement de variable :

$$I_p = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-p\pi)^2}\sin t\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\sin(x+p\pi)\,dx = (-1)^p I_0 = 0$$

car la fonction $x \mapsto e^{-x^2}\sin x$ est impaire !

Q37 On procède avec conviction au changement de variable $t = \frac{\ln x}{2\pi}$, qui donne

$$e^{-(t-p\pi)^2}\,dt = \exp\left(-\frac{\ln^2 x}{4\pi^2} + 2p\pi\frac{\ln x}{2\pi} - p^2\pi^2\right)\frac{dx}{2\pi x} \qquad \text{, d'où}$$

$$\forall p \in \mathbb{N} \qquad I_p = \frac{e^{-p^2\pi^2}}{2\pi}\int_0^{+\infty} x^{p-1}\exp\left(-\frac{\ln^2 x}{4\pi^2}\right)\sin\left(\frac{\ln x}{2\pi}\right)dx \text{ (oui, même si } p = 0\ldots\text{).}$$

Q38 Conclusion : la fonction très naturelle $x \mapsto \exp\left(-\frac{\ln^2 x}{4\pi^2}\right)\sin\left(\frac{\ln x}{2\pi}\right)$ a tous ses moments nuls. Revoyez l'exercice classique (avec le théorème de Weierstrass) qui montre qu'une fonction continue ayant tous ses moments nuls **sur un segment** est la fonction nulle !