

PROBLÈME

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note $p_{k,n}(X)$ le polynôme $\binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$.

PARTIE 1. GEOMETRIE

On note A_0, A_1 et A_2 les trois éléments de \mathbb{R}^2 définis par $A_0 = (0, 1)$, $A_1 = (1, 1)$ et $A_2 = (1, 0)$.
On note \mathcal{S} l'ensemble défini par $\mathcal{S} = \{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid x + y \geq 1\}$.

Pour tout $t \in [0, 1]$, on remarque que $p_{0,1}(t) = 1 - t$ et $p_{1,1}(t) = t$. On note alors :

$$A(t) = p_{0,1}(t)A_0 + p_{1,1}(t)A_1, \quad B(t) = p_{0,1}(t)A_1 + p_{1,1}(t)A_2 \quad \text{et} \quad C(t) = p_{0,1}(t)A(t) + p_{1,1}(t)B(t).$$

1. Soit $t \in [0, 1]$.

$$1.a) \quad p_{0,2}(t) = \binom{2}{0} t^0 (1-t)^2 = (1-t)^2, \quad p_{1,2}(t) = \binom{2}{1} t^1 (1-t)^1 = 2t(1-t), \quad \text{et}, \quad p_{2,2}(t) = \binom{2}{2} t^2 (1-t)^0 = t^2.$$

$$1.b) \quad \boxed{A(t) = (1-t)A_0 + tA_1 = (t, 1)}, \quad \boxed{B(t) = (1-t)A_1 + tA_2 = (1, 1-t)}, \quad \text{et}, \\ \boxed{C(t) = (1-t)A(t) + tB(t) = (2t - t^2, 1 - t^2)}.$$

$$1.c) \quad \text{On a alors, } \sum_{k=0}^2 p_{k,2}(t)A_k = (1-t)^2 A_0 + 2t(1-t)A_1 + t^2 A_2 = (2t - t^2, 1 - t^2) = C(t).$$

2.) Soit $(A, B) \in \mathcal{S}^2$, soit $\lambda \in [0, 1]$, posons $C = \lambda A + (1-\lambda)B$, alors, $A = (x, y)$, $B = (x', y')$ avec $(x, y, x', y') \in [0, 1]^4$ et $x + y \geq 1$, $x' + y' \geq 1$.

Ainsi, $C = (\lambda x + (1-\lambda)x', \lambda y + (1-\lambda)y')$ et $0 \leq \lambda x + (1-\lambda)x' \leq \lambda + 1 - \lambda = 1$ car x et y sont entre 0 et 1, de même, $0 \leq \lambda y + (1-\lambda)y' \leq \lambda + 1 - \lambda = 1$, de plus, $\lambda x + (1-\lambda)x' + \lambda y + (1-\lambda)y' = \lambda(x+y) + (1-\lambda)(x'+y') \geq \lambda + (1-\lambda) = 1$, $x + y \geq 1$ et $x' + y' \geq 1$.

En conclusion, $\boxed{\mathcal{S} \text{ est donc une partie convexe de } \mathbb{R}^2}$.

3.) Soit \mathcal{C} l'arc paramétré à partir de la fonction $f : \begin{array}{l} t \mapsto C(t) \\ [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2. \end{array}$

3.a) Soit $t \in [0, 1]$, $C(t) = (2t - t^2, 1 - t^2) \in [0, 1]^2$ car $t \in [0, 1]$, donc, $t^2 \in [0, 1] \Rightarrow 1 - t^2 \in [0, 1]$.

La fonction $f : t \mapsto 2t - t^2$, est dérivable sur $[0, 1]$, et, $f'(t) = 2 - 2t = 2(1-t) \geq 0$ sur $[0, 1]$, or, $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, donc, $\forall t \in [0, 1]$, $f(t) \in [0, 1]$.

De plus, $2t - t^2 + 1 - t^2 = 1 + 2t(1-t) \geq 1$, car $t(1-t) \geq 0$.

Ainsi, $\boxed{\text{tous les points de } \mathcal{C} \text{ sont dans } \mathcal{S}}$.

3.b) Pour tout $t \in [0, 1]$, $\boxed{\text{un vecteur directeur de la tangente } \mathcal{D}_t \text{ à } \mathcal{C} \text{ en } C(t) \text{ est } (2-2t, -2t)}$ car, f est de classe \mathcal{C}^1 et $f'(t) = (2-2t, -2t) \neq (0, 0)$.

3.c) Soit $t \in [0, 1]$, une équation de la droite \mathcal{D}_t est : $\left| \begin{array}{cc} x - (2t - t^2) & 2 - 2t \\ y - (1 - t^2) & -2t \end{array} \right| = 0 \iff t(x - 2t + t^2) + (1 - t)(y - 1 + t^2) = 0$.

Et, $A(t) \in \mathcal{D}_t$, car, $t(t - 2t + t^2) + (1-t)(1 - 1 + t^2) = 0$, $B(t) \in \mathcal{D}_t$, car, $t(1 - 2t + t^2) + (1-t)(1 - t - 1 + t^2) = 0$.

$A(t)$ et $B(t)$ sont sur la droite \mathcal{D}_t , donc, pour tout $t \in [0, 1]$, $\boxed{\text{le segment } [A(t), B(t)] \text{ est inclus dans } \mathcal{D}_t}$

3.d)

PARTIE 2. ALGÈBRE LINÉAIRE ET PROBABILITÉS

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On note \mathcal{F} la famille de $\mathbb{R}_n[X]$ constituée des polynômes $(p_{0,n}(X), p_{1,n}(X), \dots, p_{n,n}(X))$.

4. 4.a) φ_n et B_n sont des applications linéaires, en effet,

$$\text{soit } (P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2, \text{ soit } \lambda \in \mathbb{R}, \varphi_n(\lambda P + Q) = nX(\lambda P + Q)(X) + X(1-X)(\lambda P + Q)'(X) = \lambda[nXP(X) + X(1-X)P'(X)] + [nXQ(X) + X(1-X)Q'(X)] = \lambda\varphi_n(P) + \varphi_n(Q).$$

$$B_n(\lambda P + Q)(X) = \sum_{k=0}^n (\lambda P + Q) \left(\frac{k}{n} \right) p_{k,n}(X) = \lambda \sum_{k=0}^n P \left(\frac{k}{n} \right) p_{k,n}(X) + \sum_{k=0}^n Q \left(\frac{k}{n} \right) p_{k,n}(X) \\ = \lambda B_n(P) + B_n(Q).$$

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi_n(P) \in \mathbb{R}_n[X]$, car, $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, or, $\varphi_n(X^k) = nX^{k+1} + X(1-X)kX^{k-1} = (n-k)X^{k+1} + kX^k$ a un degré $k+1 \leq n$ si $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, et $\varphi_n(X^n) = nX^n$ a un degré n , donc, $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\varphi_n(X^k) \in \mathbb{R}_n[X]$, ainsi, $\varphi_n(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

Et, $B_n(P) = \sum_{k=0}^n P\left(\frac{k}{n}\right) p_{k,n}(X) \in \mathbb{R}_n[X]$, car $P\left(\frac{k}{n}\right) \in \mathbb{R}$ et pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $p_{k,n} \in \mathbb{R}_n[X]$.

Ainsi, φ_n et B_n sont des endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$.

4.b) Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \varphi_n(p_{k,n})(X) &= nXp_{k,n}(X) + X(1-X)p'_{k,n}(X) \\ &= nX \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} + X(1-X) \left[\binom{n}{k} k X^{k-1} (1-X)^{n-k} - \binom{n}{k} X^k (n-k) (1-X)^{n-k-1} \right] \\ &= n \binom{n}{k} X^{k+1} (1-X)^{n-k} + k \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k+1} - (n-k) \binom{n}{k} X^{k+1} (1-X)^{n-k} \\ &= k \binom{n}{k} X^{k+1} (1-X)^{n-k} + k \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k+1} \\ &= k \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} [X+1-X] = k \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} = kp_{k,n}(X) \end{aligned}$$

4.c) D'après la question précédente, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $p_{k,n}$ est un vecteur propre de B_n associé à la valeur propre k (car $p_{k,n} \neq 0$ et $\varphi_n(p_{k,n}) = kp_{k,n}$).

La famille \mathcal{F} est donc une famille libre, puisque ce sont $n+1$ vecteurs propres de φ_n associés $n+1$ valeurs propres distinctes.

Or, $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$, [la famille \mathcal{F} est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et φ_n est diagonalisable].

4.d) φ_n n'est pas bijectif, car φ_n possède la valeur propre 0, donc, φ_n n'est pas injectif.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $B_n(P) = 0 \iff \sum_{k=0}^n P\left(\frac{k}{n}\right) p_{k,n}(X) = 0 \iff \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P\left(\frac{k}{n}\right) = 0$ car $\{p_{k,n} / k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$ est une famille libre.

P possède donc $n+1$ racines distinctes, comme $d^\circ(P) \leq n$, P est le polynôme nul. Ainsi, $\text{Ker}(B_n) = \{0\} \iff B_n$ est injectif, comme c'est un endomorphisme en dimension finie, B_n est bijectif.

5. Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, 1]$. T_r suit la loi binomiale $\mathcal{B}(r, t)$. On note $\overline{T_r} = T_r/r$.

5.a) La variable aléatoire qui compte le nombre de succès d'un événement de probabilité t au cours de r expériences identiques et indépendants suit la loi binomiale $\mathcal{B}(r, t)$.

5.b) Nous avons $T_r(\Omega) = \llbracket 0, r \rrbracket$ et, pour tout $k \in \llbracket 0, r \rrbracket$, on a $P(T_r = k) = \binom{r}{k} t^k (1-t)^{r-k} = p_{k,r}(t)$ en effet, on doit avoir k succès et $r-k$ échecs au cours de nos r expériences et il faut choisir les rangs des k succès parmi les r expériences.

5.c) $E(T_r) = rt$, $E(\overline{T_r}) = \frac{1}{r} E(T_r) = t$ par linéarité de l'espérance.

$V(T_r) = rt(1-t)$, $V(\overline{T_r}) = \frac{1}{r^2} V(T_r) = \frac{t(1-t)}{r}$, $E(T_r^2) = V(T_r) + (E(T_r))^2 = rt(1-t) + r^2 t^2$ d'après

la formule de Huyghens, et, $E((\overline{T_r})^2) = \frac{1}{r^2} E(T_r^2) = \frac{t(1-t)}{r} + t^2 = \frac{t}{r} + \frac{t^2}{r}(r-1)$.

5.d) Pour tout $t \in [0, 1]$: $\sum_{k=0}^r p_{k,r}(t) = 1$ car, T_r est une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket 0, r \rrbracket$.

$\sum_{k=0}^r \frac{k}{r} p_{k,r}(t) = \sum_{k=0}^r \frac{k}{r} P(T_r = k) = \sum_{k=0}^r \frac{k}{r} P\left(\overline{T_r} = \frac{k}{r}\right) = E(\overline{T_r}) = t$ d'après la formule de transfert.

$$\begin{aligned} \text{Et, } \sum_{k=0}^r \left(\frac{k}{r}\right)^2 p_{k,r}(t) &= \sum_{k=0}^r \left(\frac{k}{r}\right)^2 P(T_r = k) = \sum_{k=0}^r \left(\frac{k}{r}\right)^2 P\left(\overline{T_r} = \frac{k}{r}\right) \\ &= E((\overline{T_r})^2) = \left(1 - \frac{1}{r}\right) t^2 + \frac{1}{r} t \end{aligned}$$

5.e) Les trois relations obtenues à la question précédente sont des expressions polynomiales en t qui sont identiques sur tout l'intervalle $[0, 1]$, elles coïncident donc en une infinité de valeurs, elles sont donc égales. Ainsi, les trois égalités précédentes sont encore valables pour tout $t \in \mathbb{R}$.

6. $\mathbb{R}_2[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$, en effet, $\mathbb{R}_2[X]$ est inclus dans $\mathbb{R}_n[X]$, $0 \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}_2[X]$ est stable par combinaison linéaire.

De plus, nous avons, d'après la question précédente, si on pose $P_k(X) = X^k$ pour $k \in \{0, 1, 2\}$, $B_n(P_0)(X) = \sum_{k=0}^n P_0 \binom{k}{n} p_{k,n}(X) = 1 \in \mathbb{R}_2[X]$, $B_n(P_1)(X) = \sum_{k=0}^n P_1 \binom{k}{n} p_{k,n}(X) = \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} p_{k,n}(X) = X \in \mathbb{R}_2[X]$ et, $B_n(P_2)(X) = \sum_{k=0}^n \binom{k}{n}^2 p_{k,n}(X) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) X^2 + \frac{1}{n} X \in \mathbb{R}_2[X]$.

L'image par B_n d'une base de $\mathbb{R}_2[X]$ est dans $\mathbb{R}_2[X]$, donc $\mathbb{R}_2[X]$ est stable par B_n .

On note \tilde{B}_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ induit par B_n ; on rappelle que dans ce cas, pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $\tilde{B}_n(P) = B_n(P)$. On note A_n la matrice de \tilde{B}_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

7. $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{n} \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{n} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{n} \end{pmatrix} + \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) I_3 + \frac{1}{n} H$.

8. 8.a) $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire, son polynôme caractéristique est donc $X(X-1)^2$, 0 est une valeur propre simple, son espace propre est donc de dimension 1, et 1 est une valeur propre double, et le rang de $H - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est 1, donc, par théorème du rang la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre 1 est $3 - \text{rg}(H - I) = 2$, la matrice H est donc diagonalisable.

- 8.b) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Q$ est inversible, car c'est une matrice triangulaire qui n'a aucun 0 sur sa diagonale.

- 8.c) On sait que, si on note $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $HE_1 = E_1$ et $HE_2 = E_2$, or, pour diagonaliser H , on prend une base de vecteurs propres pour $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et Q la matrice de passage de la base $\{E_1, E_2, E_3\}$ à la base de vecteurs propres.

Il reste donc à trouver un troisième vecteur $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ tel que $HX = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
 $\iff \begin{cases} a = 0 \\ b + c = 0 \end{cases}$ avec $c = 1$ (d'après ce qui est demandé), on trouve que $X = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est l'unique solution. On prend donc $E_3 = X$.

Ainsi, si on pose $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors, Q est inversible et $Q^{-1}HQ = D \iff H = QDQ^{-1}$.

9. 9.a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (A_n) = I_3$, en effet, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^2$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (A_n)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

- 9.b) ψ est linéaire, en effet,

Soit $(M, M') \in (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^2$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\psi(\lambda M + M') = Q(\lambda M + M')Q^{-1} = \lambda QMQ^{-1} + QM'Q^{-1} = \lambda\psi(M) + \psi(M').$$

- 9.c) ψ est une application linéaire de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et ces deux espaces vectoriels sont de dimension finie, donc, ψ est continue.

Ainsi, si $\lim_{\ell \rightarrow +\infty} (M_\ell) = M$, alors, $\lim_{\ell \rightarrow +\infty} (QM_\ell Q^{-1}) = \lim_{\ell \rightarrow +\infty} \psi(M_\ell) = \psi(M) = QMQ^{-1}$.

- 9.d) Nous avons $Q^{-1}A_nQ = Q^{-1} \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right) I_3 + \frac{1}{n} H \right] Q = \left(1 - \frac{1}{n}\right) Q^{-1}I_3Q^{-1} + \frac{1}{n} QHQ^{-1}$.

Ainsi, $Q^{-1}A_nQ = \left(1 - \frac{1}{n}\right) I_3 + \frac{1}{n} D = A_n$.

9.e) Pour $n \geq 2$, pour $\ell \in \mathbb{N}$, $A_n^\ell = QD_n^\ell Q^{-1}$.

Or, $\lim_{\ell \rightarrow +\infty} (D_n^\ell) = D$, car, $0 < 1 - \frac{1}{n} < 1 \Rightarrow \lim_{\ell \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\ell = 1$, donc, $\lim_{\ell \rightarrow +\infty} (D_n^\ell)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$
pour $n \geq 2$.

Ainsi, pour $n \geq 2$, $\boxed{\lim_{\ell \rightarrow +\infty} (A_n^\ell) = QDQ^{-1} = H}$ d'après la question précédente.

9.f) Pour $n \geq 2$, $A_n^n = QD_n^n Q^{-1}$.

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (D_n^n)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \neq 3 \\ e^{-1} & \text{si } i = j = 3 \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$ pour $n \geq 2$, car $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1}$.

En conclusion, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (A_n^n) = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-1} \end{pmatrix} Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d'après la question 9.c).

D'où, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} (A_n^n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -e^{-1} \\ 0 & 0 & e^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 - e^{-1} \\ 0 & 0 & e^{-1} \end{pmatrix}}$.

PARTIE 3. ANALYSE ET PROBABILITES

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour f une fonction définie sur $[0, 1]$ à valeurs dans \mathbb{R} , pour tout $x \in \mathbb{R}$ on note :

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) p_{k,n}(x).$$

On reprend les notations de la question 5 avec $r = n$. On remarque que dans ce cas, pour tout $t \in [0, 1]$, on a :

$$f(t) - B_n(f)(t) = E(f(t) - f(\overline{T}_n)) = \sum_{k=0}^n (f(t) - f(k/n)) p_{k,n}(t).$$

10.10.a) Soit Y une variable aléatoire discrète Y admettant une variance, d'après la formule de Huyghens, $V(Y) = E((Y - E(Y))^2) = E(Y^2) - (E(Y))^2 \geq 0$, donc, $E(Y^2) \geq (E(Y))^2 \iff \boxed{E(Y) \leq |E(Y)| \leq \sqrt{E(Y^2)}}$.

10.b) Pour tout $t \in [0, 1]$, $E(|t - \overline{T}_n|) \leq \sqrt{E\left(\left(t - \overline{T}_n\right)^2\right)}$.

Or, $E\left(\left(t - \overline{T}_n\right)^2\right) = E\left(t^2 - 2t\overline{T}_n + \overline{T}_n^2\right) = t^2 - 2tE(\overline{T}_n) + E(\overline{T}_n^2) =$ par linéarité de l'espérance, ainsi,
 $E\left(\left(t - \overline{T}_n\right)^2\right) = t^2 - 2t \cdot t + \left(1 - \frac{1}{n}\right)t^2 + \frac{1}{n}t = \frac{t - t^2}{n} = \frac{t(1-t)}{n}$ d'après la question 5.c).

D'où, $\boxed{\text{pour tout } t \in [0, 1], E(|t - \overline{T}_n|) \leq \sqrt{\frac{t(1-t)}{n}}}$.

11 On suppose dans toute cette question que f est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$.

11.a) f' est continue sur le segment $[0, 1]$, ainsi, f' est bornée sur $[0, 1]$, et $\boxed{\text{il existe donc un réel } M_f \text{ tel que}}$:
 $\forall x \in [0, 1], |f'(x)| \leq M,$

D'après l'inégalité des accroissements finis, $\boxed{\text{pour tout } (a, b) \in [0, 1]^2, |f(a) - f(b)| \leq M_f |a - b|}$.

Dans toute la suite de cette question, on suppose que M_f est un réel choisi de telle sorte que :

$$\forall (a, b) \in [0, 1]^2, |f(a) - f(b)| \leq M_f |a - b|;$$

11.b) Pour tout $t \in [0, 1]$, comme, $\overline{T}_n(\Omega) \subset [0, 1]$ (car $T_n(\Omega) \subset \llbracket 0, n \rrbracket$), on peut donc appliquer l'inégalité obtenue à la question précédente.

Ainsi, $E(|f(t) - f(\overline{T}_n)|) \leq E(M_f |t - \overline{T}_n|) = M_f E(|t - \overline{T}_n|)$ par croissance puis, linéarité de l'espérance.

Ainsi, d'après la question 10.b), $\boxed{E(|f(t) - f(\overline{T}_n)|) \leq M_f \sqrt{\frac{t(1-t)}{n}}}$.

11.c) Pour tout $t \in [0, 1]$, $|f(t) - B_n(f)(t)| = |E(f(t) - f(\overline{T}_n))| \leq E(|f(t) - f(\overline{T}_n)|)$, en effet, pour tout variable discrète Y admettant une espérance, $|E(Y)| \leq E(|Y|)$, car si $Y(\Omega) = \{y_i / i \in I\}$, $|E(Y)| = \left| \sum_{i \in I} y_i P(Y = y_i) \right| \leq \sum_{i \in I} |y_i| P(Y = y_i) = E(|Y|)$ puisque $\sum y_i P(Y = y_i)$ est une série absolument convergente.

$$\text{D'où, } E(|f(t) - f(\overline{T}_n)|) \leq M_f \sqrt{\frac{t(1-t)}{n}}.$$

De plus, $h : t \mapsto t(1-t) = t - t^2 \geq 0$ est dérivable sur $[0, 1]$, et $h'(t) = 1 - 2t = 0 \iff t = 1/2$, h est croissante sur $[0, 1/2]$ et décroissante sur $[1/2, 1]$, donc, $\forall t \in [0, 1]$, $0 \leq h(t) \leq h(1/2) = 1/4$.

En conclusion, $\boxed{\text{pour tout } t \in [0, 1], |f(t) - B_n(f)(t)| \leq \frac{M_f}{2\sqrt{n}}}$.

11.d) On a pour tout $t \in [0, 1]$, $|f(t) - B_n(f)(t)| \leq \frac{M_f}{2\sqrt{n}} = a_n$ avec a_n indépendant de t et $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc,

$\boxed{(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

PARTIE 4. INTEGRALES

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$.

12. $x \mapsto B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) p_{k,n}(x)$ est continue sur $[0, 1]$ comme composée et somme de fonctions continues,

et, $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

$$\text{Donc, } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^1 B_n(f)(x) dx \right) = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} B_n(f)(x) dx = \int_0^1 f(x) dx}.$$

13. On note $S_n(f) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$.

13.a) Pour tout $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}$, on pose $u(x) = x^a$, $v(x) = (1-x)^b$, $u'(x) = ax^{a-1}$, et, $v(x) = -\frac{1}{b+1}(1-x)^{b+1}$, u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$,

$$\text{d'où, } \boxed{\int_0^1 x^a (1-x)^b dx = [u(x)v(x)] + \frac{a}{b+1} \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b+1} dx = \frac{a}{b+1} \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b+1} dx}.$$

13.b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit \mathcal{P}_k la propriété : $\int_0^1 p_{k,n}(x) dx = \frac{1}{n+1}$.

* \mathcal{P}_0 est vraie, car $\int_0^1 p_{0,n}(x) dx = \int_0^1 (1-t)^n dx = \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.

* Supposons \mathcal{P}_k vraie, et montrons que \mathcal{P}_{k+1} est vraie avec $0 \leq k+1 \leq n$.

$$\int_0^1 \binom{n}{k+1} x^{k+1} (1-x)^{n-k-1} dx = \frac{k+1}{n-k} \int_0^1 \binom{n}{k+1} x^k (1-x)^{n-k} dx.$$

$$\text{Or, } \frac{k+1}{n-k} \binom{n}{k+1} = \frac{(k+1)n!}{(n-k)(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

$$\text{Ainsi, } \int_0^1 \binom{n}{k+1} x^{k+1} (1-x)^{n-k-1} dx = \int_0^1 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} dx = \frac{1}{n+1} \text{ d'après } \mathcal{P}_k.$$

* En conclusion, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ tout } k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathcal{P}_k \text{ est vraie,}}$

c'est à dire que $\boxed{\int_0^1 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} dx}$ est indépendant de k et vaut $\frac{1}{n+1}$.

13.c) Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \int_0^1 p_{n,k}(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^1 B_n(f)(x) dx \right) =}$$

$$\boxed{\int_0^1 f(x) dx} \text{ d'après les questions 12. et 13.b).}$$

14. Si f est continue sur $[0, 1]$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f) = \int_0^1 f(x) dx$ car $S_n(f)$ est une somme de Riemann attachée à f fonction continue sur $[0, 1]$.

15. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ tels que $a + b \leq c - 2$.

15.a) Soit $x \in [0, 1]$, la fonction $g : u \mapsto \frac{u^a(1+xu)^b}{(1+u)^c}$ est continue par morceaux sur \mathbb{R}_+ .

De plus,

* si $x \neq 0$, $g(u) \underset{u \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u^a(xu)^b}{u^c} \underset{u \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^b}{u^{c-a-b}}$ avec $c - a - b \geq 2 > 1$, donc $u \mapsto \frac{x^b}{u^{c-a-b}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

* si $x = 0$, $g(u) \underset{u \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u^a}{u^c} \underset{u \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{u^{c-a}}$ et $c - a \geq b + 2 > 1$, donc, $u \mapsto g(u)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{u^a(1+xu)^b}{(1+u)^c} du$ est convergente.

15.b) Pour $b \geq 1$, la fonction $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{u^a(1+xu)^b}{(1+u)^c} du$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$ d'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, en effet,

* Pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto h(x, u) = \frac{u^a(1+xu)^b}{(1+u)^c}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$.

* Pour tout $x \in [0, 1]$, $u \mapsto h(x, u) = \frac{u^a(1+xu)^b}{(1+u)^c}$ est continue par morceaux et intégrable sur \mathbb{R}_+ , car $a + b \leq c - 2$.

* Pour tout $x \in [0, 1]$, $u \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, u) = \frac{u^a b u (1+xu)^{b-1}}{(1+u)^c} = \frac{u^a b u (1+xu)^{b-1}}{(1+u)^c}$ est continue par morceaux.

* **Domination :**

Pour tout $x \in [0, 1]$ et pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, $\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, u) \right| = \left| b \cdot \frac{u^{a+1}(1+xu)^{b-1}}{(1+u)^c} \right| \leq b \cdot \frac{u^{a+1}(1+u)^{b-1}}{(1+u)^c} = \varphi(u)$.

Et, φ est continue par morceaux, positive et intégrable sur \mathbb{R}_+ , d'après la question 15.a), car $a+1 \in \mathbb{N}$, $b-1 \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{N}$ et $a+1+b-1 = a+b \leq c-2$.

15.c) La fonction $h : \begin{matrix} t & \mapsto & \frac{t}{1-t} \\ [0, 1[& \rightarrow & [0, +\infty[\end{matrix}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1[$, et $h'(t) = \frac{1-t+t}{(1-t)^2} = \frac{1}{(1-t)^2} > 0$

pour $t \in [0, 1[$.

h est donc continue et strictement croissante sur $[0, 1[$, elle est donc bijective de $[0, 1[$ sur $[0, +\infty[$.

15.d) On fait le changement de variable $u = \frac{t}{1-t}$ dans l'intégrale $F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{u^a}{(1+u)^c} dx$, ceci est possible d'après la question précédente. Et, on a $du = \frac{dt}{(1-t)^2}$. $F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{u^a}{(1+u)^c} dx$ converge.

On obtient, $F(0) = \int_0^1 \frac{\left(\frac{t}{1-t}\right)^a}{\left(1+\frac{t}{1-t}\right)^c (1-t)^2} dt = \int_0^1 \frac{t^a}{(1-t)^{a+2-c}} dt = \int_0^1 t^a (1-t)^{c-2-a} dt$.

Nous avons $a \in \mathbb{N}$, et $c-2-a \in \llbracket 0, c-2 \rrbracket$, car $c-2-a \geq b \geq 0$, donc,

$F(0) = \int_0^1 \frac{1}{\binom{c-2}{a}} p_{a, c-2}(t) dt = \frac{1}{\binom{c-2}{a}} \cdot \frac{1}{c-1} = \frac{a!(c-a-2)!}{(c-1)!}$ d'après la question 13.b).

On a alors $F(1) = \int_0^{+\infty} \frac{u^a}{(1+u)^{c-b}} dx$, avec le même calcul que précédemment en remplaçant c par $c-b \geq$

$a+2 > 2$ et avec $c-b-a-2 \geq 0$, on obtient $F(1) = \int_0^1 \frac{1}{\binom{c-b-2}{a}} p_{a, c-b-2}(t) dt = \frac{a!(c-b-a-2)!}{(c-b-1)!}$.

PARTIE 5. SERIES DE FONCTIONS

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}$, et $t \in [0, 1]$, on note :

$$f_n(t) = \begin{cases} p_{k,n}(t) & \text{si } n \geq k \\ 0 & \text{si } n < k, \end{cases} \quad \text{si bien que } f_n(t) = \begin{cases} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} & \text{si } n \geq k \\ 0 & \text{si } n < k. \end{cases}$$

16. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}}$, car pour i fixé entre 0 et $k-1$, $n-i \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$.

Pour tout $t \in]0, 1[$, on fait tendre n vers $+\infty$, donc, pour n assez grand, $n \geq k$, ainsi,

$$f_n(t) = p_{k,n}(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^k (1-t)^n \frac{t^k}{k!(1-t)^k}.$$

17. Pour t_0 fixé dans $]0, 1[$, $n^2 f_n(t_0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, car $\frac{t_0^k}{k!(1-t_0)^k}$ est fixé et $n^{k+2}(1-t)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (par croissance comparée de $\frac{1}{n^{k+2}}$ et $(1-t)^n$).

Ainsi, $f_n(t_0) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, or, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, donc, $\sum f_n(t_0)$ converge pour tout $t_0 \in [0, 1]$.

$f_n(0) = f_n(1) = 0$, donc, $\sum f_n(t_0)$ converge pour $t_0 \in \{0; 1\}$.

En conclusion, $\boxed{\sum f_n \text{ converge simplement sur } [0, 1]}$.

Pour $t \in [0, 1]$, on note $S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$.

18. $\boxed{S(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(0) = 0}$ car, si $n < k$, $f_n(0) = 0$, si $n \geq k \geq 1$, $f_n(0) = \binom{n}{k} 0^k = 0$.

$\boxed{S(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(1) = 1}$, en effet k étant fixé dans \mathbb{N}^* , si $n < k$, $f_n(1) = 0$ et si $n \geq k$, $f_n(1) = \binom{n}{k} 0^{n-k} = \begin{cases} 0 & \text{si } n = k \\ 1 & \text{si } n \neq k \end{cases}$.

19.19.a) $u \mapsto \frac{1}{1-u}$ est développable en série entière et $\boxed{\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n \text{ sur }]-1, 1[}$.

19.b) $u \mapsto \frac{1}{1-u}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur son disque ouvert de convergence à savoir sur $] -1, 1[$, et,

$$\boxed{\text{pour tout } u \in [0, 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} [u^n]^{(k)} = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)u^{n-k} = \left[\frac{1}{1-u}\right]^{(k)} = \frac{k!}{(1-u)^{k+1}}.}$$

$$\text{car } [u^n]^{(k)} = \begin{cases} 0 & \text{si } k > n \\ n(n-1)\dots(n-k+1)u^{n-k} & \text{si } k \in \llbracket 0, n \rrbracket \end{cases}.$$

19.c) D'après la définition de f_n ($f_n(t) = 0$ si $n < k$) et la question précédente, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\boxed{S(t) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \cdot n(n-1)\dots(n-k+1)(1-t)^{n-k} = \frac{t^k}{k!} \cdot \frac{k!}{(1-(1-t))^{k+1}} = \frac{1}{t}.$$

19.d) Si la série $\sum f_n$ convergerait normalement sur $[0, 1]$, elle convergerait uniformément sur $[0, 1]$.

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0, 1[$ car $k \geq 1$ (en effet, f_n est continue sur $]0, 1[$ et f_n est continue en 0 car $k \geq 1$), S serait donc continue sur $[0, 1[$, or, $S(0) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} S(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} = +\infty$;

donc, $\boxed{\sum f_n \text{ ne converge pas normalement sur } [0, 1]}$.