Théorème taubérien de Hardy-Littlewood-Karamata

A Une intégrale à paramètre

1. La fonction $\psi : u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}$ est continue sur I par théorèmes généraux.

   On a $\psi(u) \underset{u\to 0}{\sim} \dfrac{1}{u^{1/2}}$ or la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{u^{1/2}}$ est intégrable sur $]0,1]$ car $\frac{1}{2} < 1$

   Donc par comparaison à une fonction positive, ψ est intégrable sur $]0,1]$

   De plus par croissance comparée $u^2\psi(u) \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\psi(u) = \underset{u\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{u^2}\right)$

   or la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{u^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ car $2 > 1$

   Donc par comparaison à une fonction positive, ψ est intégrable sur $[1,+\infty[$

   Ainsi $\boxed{\psi : u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}} \text{ est intégrale sur I}}$ En particulier, on en déduit l'existence de K.

2. Analyse : Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{F}(x)$ existe.

   Par les limitations du programme, la fonction $u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}$ est définie (et continue par morceaux) sur I donc $x \geqslant 0$

   De plus a fonction $u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}$ étant positive sur I, elle y est intégrable.

   Si on avait $x = 0$, on aurait $\frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)} \underset{u\to 0}{\sim} \frac{1}{u^{3/2}}$ et par équivalence entre fonctions positives $u \mapsto \frac{1}{u^{3/2}}$ serait intégrable sur $]0,1]$ et donc on aurait $3/2 < 1$ Absurde

   donc $x > 0$

   Synthèse : Soit $x > 0$.

   La fonction $u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}$ est continue sur I

   De plus $\dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)} \underset{u\to 0}{\sim} \dfrac{1}{xu^{1/2}}$ et $\dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)} = \underset{u\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{u^2}\right)$

   On peut conclure comme en **1** que $u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}$ est intégrable sur I

   Conclusion : $\boxed{\text{l'ensemble les valeurs de } x \text{ pour lesquelles } \mathrm{F}(x) \text{ est définie est } \mathrm{I} =]0,+\infty[}$

3. On pose $f : (x,u) \in \mathrm{I}^2 \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}$

   (i) Soit $u \in \mathrm{I}$.
   La fonction $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et admet comme dérivée $x \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,u) = \dfrac{-\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)^2}$

   (ii) Soit $x \in \mathrm{I}$. La fonction $u \longmapsto f(x,u) = \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}$ est continue et intégrable sur I d'après la question précédente.

   (iii) Soit $x \in \mathrm{I}$. La fonction $u \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,u) = \dfrac{-\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)^2}$ est continue sur I

   (iv) Soit $a < b$ dans I. On a l'hypothèse de domination :

$$\forall x \in [a,b],\ \forall t \in \mathrm{I},\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,u)\right| \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+a)^2}$$

et la fonction $u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+a)^2}$ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$ (l'intégrabilité étant analogue aux précédentes)

En conclusion avec (i), (ii), (iii) et (iv), le théorème de Leibniz s'applique :

$$\boxed{\text{la fonction F est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur I et } \mathrm{F}' : x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{-\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)^2}\mathrm{d}u}$$

4. Soit $x \in \mathrm{I}$.

On a $x\mathrm{F}'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{-\mathrm{e}^{-u}(x+u)}{\sqrt{u}(u+x)^2}\mathrm{d}u + \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}u}{\sqrt{u}(u+x)^2}\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{-\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}\mathrm{d}u + \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}\sqrt{u}}{(u+x)^2}\mathrm{d}u$

donc $x\mathrm{F}'(x) = -\mathrm{F}(x) + \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}\sqrt{u}}{(u+x)^2}\mathrm{d}u$

On va effectuer une intégration par parties (sous réserve d'existence) avec des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}\sqrt{u}}{(u+x)^2}\mathrm{d}u = \left[\frac{-\mathrm{e}^{-u}\sqrt{u}}{u+x}\right]_{u=0}^{u\to+\infty} + \int_0^{+\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^{-u}}{2\sqrt{u}(u+x)} - \frac{\mathrm{e}^{-u}\sqrt{u}}{u+x}\right)\mathrm{d}u$$

Le terme entre crochets est nul par croissance comparée, ce qui valide l'intégration par parties

ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}\sqrt{u}}{(u+x)^2}\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{2\sqrt{u}(u+x)}\mathrm{d}u - \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}\sqrt{u}}{u+x}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\mathrm{F}(x) - \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}\sqrt{u}}{u+x}\mathrm{d}u$

On a bien le droit de couper l'intégrale en 2 car on a reconnu $\mathrm{F}(x)$

donc $x\mathrm{F}'(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{F}(x) - \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}\sqrt{u}}{u+x}\mathrm{d}u$

donc $x\mathrm{F}'(x) - (x-\frac{1}{2})\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{-x\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}\mathrm{d}u - \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}\sqrt{u}}{u+x}\mathrm{d}u$

donc $x\mathrm{F}'(x) - (x-\frac{1}{2})\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{-(x+u)\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}\mathrm{d}u$ après mise au même dénominateur

On en déduit $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathrm{I},\ x\mathrm{F}'(x) - (x-\tfrac{1}{2})\mathrm{F}(x) = -\mathrm{K}.}$

5. La fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$ par produit

et on a $\mathrm{G}'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{F}(x) - \sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{F}(x) + \sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{F}'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\big(x\mathrm{F}'(x) - (x-\frac{1}{2})\mathrm{F}(x)\big)$

donc $\mathrm{G}'(x) = -\mathrm{K}\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}$

La fonction $x \mapsto \mathrm{K}\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}$ étant continue sur $]0,+\infty[$ et intégrable au voisinage de 0

alors la fonction $x \mapsto \mathrm{K}\cdot\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et de dérivée $x \mapsto \mathrm{K}\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}$

donc la fonction $x \mapsto \mathrm{G}(x) + \mathrm{K}\cdot\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ est constante sur l'intervalle I

Ainsi $\boxed{\text{il existe une constante réelle C telle que pour tout } x \in \mathrm{I},\ \mathrm{G}(x) = \mathrm{C} - \mathrm{K}\cdot\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t}$

6. Soit $x > 0$. La fonction $u \mapsto \frac{u}{x}$ est $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et bijective de I vers I

On effectue dans $\mathrm{G}(x)$ sous forme intégrale le changement de variable $t = \frac{u}{x}$; $u = tx$; $\mathrm{d}u = x\mathrm{d}t$

donc $\mathrm{G}(x) = \mathrm{e}^{-x}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t}(tx+x)}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t}(t+1)}\mathrm{d}t$

On considère une suite (x_n) à valeurs dans I qui converge vers 0

On pose $f_n : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-tx_n}}{\sqrt{t}(t+1)}$ et $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}(t+1)}$

(i) Les fonctions f_n sont continues sur I
(ii) La suite $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur I
(iii) La fonction f est continue sur I
(iv) De plus $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1/2}}$ et $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{3/2}}$ ainsi comme en **1.**, f est intégrable sur I et on a l'hypothèse de domination :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathrm{I},\ |f_n(t)| \leqslant f(t)$$

Avec $(i), (ii), (iii)$ et (iv), le théorème de convergence dominée s'applique et on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathrm{I}} f_n = \int_{\mathrm{I}} f$

Donc par caractérisation séquentielle de la limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t}(t+1)}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(t+1)}\mathrm{d}t$

Remarque : On aurait pu utiliser directement l'extension du théorème de convergence dominé

donc par produit $\displaystyle\lim_{x\to 0} \mathrm{G}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(t+1)}\mathrm{d}t$

On la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et bijective de I vers I
on effectue le changement de variables $v = \sqrt{t}$; $t = v^2$; $\mathrm{d}t = 2v\mathrm{d}v$

et donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(t+1)}\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{v^2+1}\mathrm{d}v = 2\left[\arctan(v)\right]_{v=0}^{v\to+\infty} = \pi$

donc $\boxed{\lim_{x\to 0} \mathrm{G}(x) = \pi}$

de plus pour $x > 0$, on a $\displaystyle 0 \leqslant \mathrm{G}(x) = \mathrm{e}^{-x}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t}(t+1)}\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{e}^{-x}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(t+1)}\mathrm{d}t$

donc par théorème d'encadrement $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \mathrm{G}(x) = 0}$

La fonction $t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}$ étant continue et intégrable sur I, on a $\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_0^{x} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = 0$

comme $\displaystyle\mathrm{G} : x \mapsto \mathrm{C} - \mathrm{K}\cdot\int_0^{x} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ on a donc $\mathrm{C} = \pi$

or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^{x} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \mathrm{K}$

donc $\displaystyle 0 = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{G}(x) = \pi - \mathrm{K}^2$ de plus on a $\mathrm{K} \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale donc $\boxed{\mathrm{K} = \sqrt{\pi}}$

B Étude de deux séries de fonctions

7. (i) Pour $n \geqslant 1$, la fonction $x \mapsto \sqrt{n}\mathrm{e}^{-nx}$ est continue sur I
(ii) Soit $a < b$ dans I. On a : $\forall x \in \mathrm{I},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ |\sqrt{n}\mathrm{e}^{-nx}| \leqslant \sqrt{n}\mathrm{e}^{-na}$
or $n^2\sqrt{n}\mathrm{e}^{-na} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée donc $\sqrt{n}\mathrm{e}^{-na} = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge
donc par comparaison à une série à termes positifs la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \sqrt{n}\mathrm{e}^{-na}$ converge
Ainsi la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(x \mapsto \sqrt{n}\mathrm{e}^{-nx}\right)$ converge normalement sur tout segment de I
(iii) Ainsi $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(x \mapsto \sqrt{n}\mathrm{e}^{-nx}\right)$ converge simplement vers g sur I

Avec $(i), (ii)$ et (iii), on vient de montrer que $\boxed{g \text{ est définie et continue sur I}}$
de manière analogue $\boxed{f \text{ est définie et continue sur I}}$

8. Soit $x \in \mathrm{I}$. On pose $l : u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u}}$.

   Cette fonction est le produit des deux fonctions positives et décroissantes sur I : $u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{u}}$ et $u \mapsto \mathrm{e}^{-ux}$
   donc la fonction l est décroissante sur I, et comme en 1., la fonction l est continue et intégrable sur I
   donc pour $n \geqslant 1$, on a $\displaystyle\int_n^{n+1} l(u)\mathrm{d}u \leqslant l(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} l(u)\mathrm{d}u$

   En sommant on obtient pour $\mathrm{N} \geqslant 1$, $\displaystyle\int_1^{\mathrm{N}+1} \frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u \leqslant \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\sqrt{n}} \leqslant \int_0^{\mathrm{N}} \frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$

   Puis par passage à la limite quand $\mathrm{N} \to +\infty$: $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u}$

   On effectue le changement de variable $\mathcal{C}^1$ bijectif, strictement croissant : $ux = t$, $x\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$
   on obtient $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{xt}}\mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{xt}}\mathrm{d}t$

   donc par théorème d'encadrement $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sqrt{x}f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \mathrm{K} = \sqrt{\pi}$

   On en déduit l'équivalent $\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{x}}}$

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2(\sqrt{n} - \sqrt{n+1})$

   donc $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n(n+1)}+n+1} \leqslant 0$

   donc la suite $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante

   En utilisant une comparaison série intégrale comme en 8. on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{1}$

   donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \geqslant 2\sqrt{n+1} - 2 - 2\sqrt{n} \geqslant -2$

   Ainsi la suite $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right)_{n\geqslant 1}$ et minorée par -2 (et décroissante)

   d'où $\boxed{\text{la suite } \displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right)_{n\geqslant 1} \text{ converge}}$

10. Soit $x > 0$. On a pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle 0 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right)\mathrm{e}^{-nx} \leqslant n\mathrm{e}^{-nx}$

    or $n^3\mathrm{e}^{-nx} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ce qui prouve que $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right)\mathrm{e}^{-nx} = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\tfrac{1}{n^2}\right)$

    On peut donc conclure comme en 7. que $\boxed{\text{la série } \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right)\mathrm{e}^{-nx} \text{ converge}}$

On considère les séries de termes généraux $a_k = \frac{e^{-kx}}{\sqrt{k}}$ et $b_k = e^{-kx}$ géométrique de raison $e^{-x} \in]0,1[$

ces séries sont absolument convergentes de sommes $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = f(x)$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k = \frac{b_1}{1-e^{-x}} = \frac{1}{e^x - 1}$

On effectue le produit de Cauchy de ces séries absolument convergentes : $c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-kx}}{\sqrt{k}} e^{-(n-k)x}$

donc $h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\right)$ Ainsi $\boxed{h(x) = \frac{f(x)}{e^x - 1} \text{ pour tout } x \in \mathrm{I}}$

11. Quand $x \to 0$, on a $e^x - 1 \sim x$ donc avec 8., on a $\boxed{h(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{x^{3/2}}}$

On a $2g(x) + 0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right) e^{-nx} = h(x)$ donc $g(x) = \frac{1}{2}\left(h(x) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right) e^{-nx}\right)$

Toute suite convergente étant bornée, le 9. nous fournit $\mathrm{M} > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right| \leqslant \mathrm{M}$

Ainsi $\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right) e^{-nx}\right| \leqslant \mathrm{M}\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} = \frac{\mathrm{M}}{e^x - 1} \sim \frac{\mathrm{M}}{x}$

donc $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right) e^{-nx} = \underset{x\to 0}{o}(h(x))$ donc $g(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}h(x)$

Ainsi $\boxed{g(x) \text{ est équivalent à } \frac{\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}} \text{ lorsque } x \to 0}$

C Séries de fonctions associées à des ensembles d'entiers

12. Si A est finie alors $f_{\mathrm{A}} : x \mapsto \sum_{n\in \mathrm{A}} e^{-nx}$ est bien définie sur $\mathbb{R}^+$ donc $\boxed{\text{si A est fini, alors } \mathrm{I_A} = [0, +\infty[}$

On suppose désormais que A est infini.

On définit φ par récurrence par $\varphi(0) = \min \mathrm{A}$ et $\varphi(n+1) = \min\left(\mathrm{A} \setminus \{\varphi(k) \,/\, 0 \leqslant k \leqslant n\}\right)$

Par construction la suite φ est strictement croissante à valeurs dans A donc telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{\varphi(n)} = 1$

$\boxed{\text{on peut extraire une suite } (b_n) = \left(a_{\varphi(n)}\right) \text{ de la suite } (a_n) \text{ telle que pour tout } n \in \mathbb{N},\, b_n = 1}$

Soit $x = 0$, la suite $(a_n e^{-nx})$ ne converge pas vers 0 avec la suite extraite $\left(b_n e^{-\varphi(n)x}\right) = (1)_{n\geqslant 0}$

donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n e^{-nx}$ diverge grossièrement.

Si $x > 0$, on a $|a_n e^{-nx}| \leqslant e^{-nx}$ ce qui donne la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n e^{-nx}$

Ainsi $\boxed{\text{si A est infini, alors } \mathrm{I_A} =]0, +\infty[}$

13. Soit $x > 0$, on a : $f_{\mathrm{A}}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k e^{-kx}$ et $\frac{1}{1-e^{-x}} = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kx}$

On remarque que pour $n \in \mathbb{N}$,on a $\mathrm{Card}(\mathrm{A}(n)) = \sum_{k=0}^{n} a_k$, on peut donc faire le produit de Cauchy de ces deux

séries absolument convergentes pour obtenir : $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Card}(\mathrm{A}(n)) e^{-nx} = \frac{f_{\mathrm{A}}(x)}{1-e^{-x}}}$

14. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\mathrm{A}_1(n) = \left\{k^2 \,/\, k \in \mathbb{N}^* \text{ et } k^2 \leqslant n\right\} = \left\{k^2 \,/\, k \in \mathbb{N}^* \text{ et } k \leqslant \sqrt{n}\right\}$
donc $\mathrm{A}_1(n) = \left\{k^2 \,/\, 1 \leqslant k \leqslant \lfloor\sqrt{n}\rfloor\right\}$ de cardinal $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$
Soit $x > 0$. À l'aide de la question précédente $\boxed{\dfrac{f_{\mathrm{A}_1}(x)}{1-\mathrm{e}^{-x}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\lfloor\sqrt{n}\rfloor\mathrm{e}^{-nx}}$
Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor \in [0,1]$ donc $0 \leqslant \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sqrt{n}\mathrm{e}^{-nx} - \dfrac{f_{\mathrm{A}_1}(x)}{1-\mathrm{e}^{-x}} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-nx} = \dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}}$
donc $(1-\mathrm{e}^{-x})g(x) - 1 \leqslant f_{\mathrm{A}_1}(x) \leqslant (1-\mathrm{e}^{-x})g(x)$ car $1 - \mathrm{e}^{-x} > 0$
or d'après 11., $(1-\mathrm{e}^{-x})g(x)$ équivaut à $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$ quand $x \to 0$
donc $\dfrac{2\sqrt{x}f_{\mathrm{A}_1}(x)}{\sqrt{\pi}}$ tend vers 1 par théorème d'encadrement
Ainsi $\boxed{f_{\mathrm{A}_1}(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}}$ donc $xf_{\mathrm{A}_1}(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\sqrt{x}\pi}{2}$ donc $\boxed{\mathrm{A}_1 \in \mathrm{S} \text{ et } \Phi(\mathrm{A}_1) = 0}$

15. Soit $x > 0$. On note la suite (a_n) associée à l'ensemble $\mathrm{A} = \mathrm{A}_1$
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $v(n) = \operatorname{card}\left(\left\{(\alpha,\beta) \in \mathrm{A}_1^2 \,/\, \alpha + \beta = n\right\}\right) = \operatorname{card}\left(\{(k, n-k) \,/\, k \in \mathrm{A}_1 \text{ et } n-k \in \mathrm{A}_1\}\right)$
donc $v(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$ car $a_0 = 0$ et aussi $v(0) = 0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{0} a_k a_{0-k}$
On effectue ensuite le produit de Cauchy de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} a_k\mathrm{e}^{-kx}$ absolument convergente par elle-même
pour obtenir : $\boxed{\text{la série } \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} v(n)\mathrm{e}^{-nx} \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} v(n)\mathrm{e}^{-nx} = (f_{\mathrm{A}_1}(x))^2}$
Pour $n \in \mathbb{N}$. On note $a^{(2)}(n)$ le terme de la suite (a_n) associée à l'ensemble A_2
On a $a^{(2)}(n) \leqslant v(n)$ ainsi $\boxed{\text{pour tout } x > 0,\ f_{\mathrm{A}_2}(x) \leqslant (f_{\mathrm{A}_1}(x))^2}$
donc $xf_{\mathrm{A}_2}(x) \leqslant (\sqrt{x}f_{\mathrm{A}_1}(x))^2$ d'où $\boxed{\Phi(\mathrm{A}_2) \leqslant \dfrac{\pi}{4}}$

D Étude de deux séries de fonctions

16. Soit $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{E}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Soit $x > 0$.
On a $|\alpha_n\mathrm{e}^{-nx}\psi_1(\mathrm{e}^{-nx})| \leqslant \|\psi_1\|_\infty\alpha_n\mathrm{e}^{-nx}$
donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\alpha_n\mathrm{e}^{-nx}\psi_1(\mathrm{e}^{-nx})$ converge par comparaison entre séries à termes positifs
donc $\mathrm{L}(\psi_1)(x)$ existe dans $\mathbb{R}$
On a $\mathrm{L}(\lambda\psi_1 + \psi_2)(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\alpha_n\mathrm{e}^{-nx}\left(\lambda\psi_1(\mathrm{e}^{-nx}) + \psi_2(\mathrm{e}^{-nx})\right)\right) = \lambda\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n\mathrm{e}^{-nx}\psi_1(\mathrm{e}^{-nx}) + \sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n\mathrm{e}^{-nx}\psi_2(\mathrm{e}^{-nx})$
donc $\mathrm{L}(\lambda\psi_1 + \psi_2)(x) = \lambda\mathrm{L}(\psi_1)(x) + \mathrm{L}(\psi_2)(x)$
ainsi $\mathrm{L}(\lambda\psi_1 + \psi_2) = \lambda\mathrm{L}(\psi_1) + \mathrm{L}(\psi_2)$
donc $\boxed{\text{L est bien définie sur E et l'application L est une application linéaire de E vers } \mathbb{R}^{\mathrm{I}} = \mathcal{F}(]0,+\infty[,\mathbb{R})}$
Erreur d'énoncé ? Selon lequel, l'espace d'arrivée serait $\mathbb{R}^{[0,1]} = \mathcal{F}([0,1],\mathbb{R})$*) !*
On suppose que $\psi_1 \leqslant \psi_2$

On a pour tout $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n e^{-nx}\psi_1(e^{-nx}) \leqslant \alpha_n e^{-nx}\psi_2(e^{-nx})$ car $\alpha_n e^{-nx} \geqslant 0$
donc $L(\psi_1)(x) \leqslant L(\psi_2)(x)$ par comparaison de séries
donc $\boxed{\text{pour tous } \psi_1, \psi_2 \text{ dans E, } \psi_1 \leqslant \psi_2 \text{ entraîne } L(\psi_1) \leqslant L(\psi_2)}$

17. On a bien $\underline{E_1 \subset E \text{ (i)}}$ et $\underline{E_1 \neq \emptyset \text{ (ii)}}$ car $\theta : x \in [0,1] \mapsto 0$ vérifie $\theta \in E$ et $\lim\limits_{x\to 0} x(L(\theta))(x) = 0$
Soit $\psi_1, \psi_2 \in E_1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Pour $x > 0$, on a $x(L(\lambda\psi_1 + \psi_2))(x) = \lambda x(L(\psi_1))(x) + x(L(\psi_2))(x)$
donc par combinaison linéaire de limites on a $\lim\limits_{x\to 0} x(L(\lambda\psi_1 + \psi_2))(x) = \lambda \lim\limits_{x\to 0} x(L(\psi_1))(x) + \lim\limits_{x\to 0} x(L(\psi_2))(x)$
ceci prouve que $\lambda\psi_1 + \psi_2 \in E_1$ donc $\underline{E_1 \text{ est stable par combinaison linéaire (iii)}}$
Avec (i), (ii) et (iii), $\boxed{E_1 \text{ est un sous espace vectoriel de E}}$
De plus $\Delta(\lambda\psi_1 + \psi_2) = \lambda\Delta(\psi_1) + \Delta(\psi_2)$ et $\Delta : E_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ donc Δ est une forme linéaire de E_1.
De plus $|x(L(\psi_1))(x)| \leqslant \|\psi_1\|_\infty x \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx}$
Par passage à la limite en 0, on a $|\Delta(\psi_1)| \leqslant \ell\|\psi_1\|_\infty$
d'où $\boxed{\text{l'application } \Delta \text{ est une forme linéaire continue de } (E_1, \| \ \|_\infty)}$

18. Soit $p \in \mathbb{N}$. On a $e_p \in E$ car continue par morceaux sur $[0,1]$.
Soit $x > 0$. On a $L(e_p)(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-n(p+1)x}$

donc $xL(e_p)(x) = \dfrac{[(p+1)x] \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-n[(p+1)x]}}{p+1}$ et $(p+1)x > 0$

par composition de limites, on a $\boxed{\Delta(e_p) = \dfrac{1}{p+1} \text{ et } e_p \in E_1}$. On remarque que $\Delta(e_p) = \ell \displaystyle\int_0^1 e_p$

Donc par combinaison linéaire , pour toute fonction polynomiale P, on a $\Delta(P) = \ell \displaystyle\int_0^1 P$

Soit $\psi \in E_0$. Le théorème de Stone-Weierstrass nous fournit une suite de fonction polynomiale (P_k) qui converge uniformément vers ψ sur $[0,1]$
Soit $x > 0$. Soit $k \in \mathbb{N}$. On a $|xL(\psi)(x) - xL(P_k)(x)| = x\,|L(\psi - P_k)(x)|$
comme $-\|\psi - P_k\|_\infty e_0 \leqslant \psi - P_k \leqslant \|\psi - P_k\|_\infty e_0$,
on a $-\|\psi - P_k\|_\infty L(e_0) \leqslant L(\psi - P_k) \leqslant \|\psi - P_k\|_\infty L(e_0)$ en utilisant 16.
Ainsi $|xL(\psi)(x) - xL(P_k)(x)| \leqslant \|\psi - P_k\|_\infty xL(e_0)(x)$
La fonction $x \mapsto xL(e_0)(x)$ est continue sur $]0,1]$ et admet comme limite ℓ en 0
donc $x \mapsto xL(e_0)(x)$ est prolongeable par continuité sur le segment $[0,1]$
donc le théorème des bornes atteintes nous fournit un majorant $M > 0$
donc $\forall x \in]0,1]$, $|xL(\psi)(x) - xL(P_k)(x)| \leqslant \|\psi - P_k\|_\infty M$ or $\lim\limits_{k\to+\infty} \|\psi - P_k\|_\infty M = 0$
donc la suite de fonction $(x \mapsto xL(P_k)(x))_{k\geqslant 0}$ converge uniformément sur $]0,1]$ vers $x \mapsto xL(\psi)(x)$
En notant $\delta_k = \lim\limits_{x\to 0} xL(P_k)(x) = \Delta(P_k)$, le théorème de la double limite nous donne alors que la suite (δ_k) converge vers un certain $L \in \mathbb{R}$ et $L = \lim\limits_{x\to 0} xL(\psi)(x)$.
Ainsi $\psi \in E_1$. On en déduit que $\boxed{E_0 \subseteq E_1}$
La fonction : $\psi \in E_0 \mapsto \ell \displaystyle\int_0^1 \psi$ est une forme linéaire continue de $(E_0, \| \ \|_\infty)$ car $\forall \psi \in E_0$, $\left|\ell \displaystyle\int_0^1 \psi\right| \leqslant \ell\|\psi\|_\infty$

Les applications Δ et $\psi \mapsto \ell \int_0^1 \psi$ sont continues sur E et coïncident sur la partie des dense des fonctions polynomiales donc $\boxed{\text{pour tout } \psi \in \mathrm{E}_0, \text{ on a } \Delta(\psi) = \ell \int_0^1 \psi}$

19. La fonction g_- est continue en tous points de $[0,1] \setminus \{a-\varepsilon, a\}$
De plus $\lim\limits_{x\to(a-\varepsilon)^-} g_(x) = \lim\limits_{x\to(a-\varepsilon)^-} g_(x) = g_(a-\varepsilon) = 1$ de même en a
donc g_- et g_+ (analogue) sont continues sur $[0,1]$ ainsi $\boxed{g_- \text{ et } g_+ \in \mathrm{E}_0}$
On a $\Delta(g_-) = \ell \int_0^1 g_- = \ell \left(\int_0^{a-\varepsilon} g_- + \int_{a-\varepsilon}^a g_- + \int_a^1 g_- \right)$
on a $\int_0^{a-\varepsilon} g_- = a - \varepsilon$ et $\int_{a-\varepsilon}^a g_- = \dfrac{\varepsilon \cdot 1}{2}$ (aire d'un triangle) et $\int_a^1 g_- = 0$
et $\Delta(g_+) = \ell \left(\int_0^a g_+ + \int_a^{a+\varepsilon} g_+ + \int_{a+\varepsilon}^1 g_+ \right)$ et $\int_0^a g_+ = a$ et $\int_a^{a+\varepsilon} g_+ = \dfrac{\varepsilon \cdot 1}{2}$ et $\int_{a+\varepsilon}^1 g_+ = 0$
donc $\boxed{\Delta(g_-) = \ell \left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right) \text{ et } \Delta(g_+) = \ell \left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right)}$
On a $1_{[0,a]} \in \mathrm{E}$ et $g_- \leqslant 1_{[0,a]} \leqslant g_+$
donc pour tout $x > 0$, $x\mathrm{L}(g_-)(x) \leqslant x\mathrm{L}(1_{[0,a]})(x) \leqslant x\mathrm{L}(g_+)(x)$
On a $\lim\limits_{x\to 0} x\mathrm{L}(g_-)(x) = \ell \left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right)$ ceci nous fournit $\alpha_1 > 0$ tel que $\forall x \in]0, \alpha_1],\ x\mathrm{L}(g_-)(x) \geqslant \ell \left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \ell \frac{\varepsilon}{2}$
donc $\forall x \in]0, \alpha_1],\ x\mathrm{L}(g_-)(x) \geqslant \ell\,(a - \varepsilon)$
de même on peut trouver $\alpha_2 > 0$, on a $\forall x \in]0, \alpha_2],\ x\mathrm{L}(g_+)(x) \leqslant \ell\,(a + \varepsilon)$
donc en prenant $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$ on a $\forall x \in]0, \alpha],\ \left|x\mathrm{L}(1_{[0,a]})(x) - \ell a\right| \leqslant \ell\varepsilon$
On vient de montrer que $\lim\limits_{x\to 0} x\mathrm{L}(1_{[0,a]})(x) = \ell a$ car $\ell\varepsilon$ est aussi petit que l'on veut
ainsi $\boxed{1_{[0,a]} \in \mathrm{E}_1 \text{ et } \Delta(1_{[0,a]}) = \ell a = \ell \int_0^1 1_{[0,a]}}$
Pour $1_{[0,a[}$, les calcul sont identiques ce qui donne : $1_{[0,a[} \in \mathrm{E}_1$ et $\Delta(1_{[0,a[}) = \ell a = \ell \int_0^1 1_{[0,a[}$
Pour $\alpha \in [0,1]$, on note $\delta_\alpha = 1_{\{\alpha\}}$.
On a donc $\delta_a = 1_{[0,a]} - 1_{[0,a[}$ ainsi par linéarité $\delta_a \in \mathrm{E}_1$ et $\Delta(\delta_a) = 0 = \ell \int_0^1 \delta_a$
On remarque que $\mathrm{L}(\delta_0) : x \mapsto 0$ donc on a encore : $\delta_0 \in \mathrm{E}_1$ et $\Delta(\delta_0) = 0 = \ell \int_0^1 \delta_0$
En ce qui concerne $1_{[a,b]} = 1_{[0,b]} - 1_{[0,a[}$, on a $1_{[a,b]} \in \mathrm{E}_1$ et $\Delta(1_{[a,b]}) = \ell(b-a) = \ell \int_0^1 1_{[a,b]}$
C'est analogue pour $1_{]a,b]}$, $1_{]a,b[}$ et $1_{[a,b[}$ et cela reste valable même si $a = 0$
On sait que $\mathrm{E}_1 \subset \mathrm{E}$. Soit maintenant $\psi \in \mathrm{E}$.
On peut écrire $\psi = \varphi + \mathcal{E}$ où φ est continue sur $[0,1]$ et $\mathcal{E}$ est une fonction en escalier
On peut écrire $\mathcal{E} = \sum\limits_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i 1_{\mathrm{J}_i}$ où $(\lambda_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est une famille finie de réels
et $(\mathrm{J}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est une famille finie d'intervalles de $[0,1]$ (éventuellement singleton)
or $\varphi \in \mathrm{E}_1$ d'après 18 et les $1_{\mathrm{J}_i} \in \mathrm{E}_1$ d'après ce qui précède
et on a $\Delta(\varphi) = \ell \int_0^1 \varphi$ et $\Delta(1_{\mathrm{J}_i}) = \ell \int_0^1 1_{\mathrm{J}_i}$
Comme Δ est linéaire sur le sous-espace vectoriel E_1,

on en déduit $\psi \in \mathrm{E}_1$ et $\Delta(\psi) = \Delta(\varphi) + \sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i \Delta(1_{\mathrm{J}_i}) = \ell \int_0^1 (\varphi + \mathcal{E})$

On en déduit que $\boxed{\mathrm{E}_1 = \mathrm{E} \text{ et } \Delta(\psi) = \ell \int_0^1 \psi \text{ pour tout } \psi \in \mathrm{E}}$

20. On a $(\mathrm{L}(\psi))(\frac{1}{\mathrm{N}}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \mathrm{e}^{-n/\mathrm{N}} \psi(\mathrm{e}^{-n/\mathrm{N}}) = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \alpha_n \mathrm{e}^{-n/\mathrm{N}} \psi(\mathrm{e}^{-n/\mathrm{N}}) = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \alpha_n \mathrm{e}^{-n/\mathrm{N}} \mathrm{e}^{n/\mathrm{N}}$

donc $\boxed{(\mathrm{L}(\psi))(\frac{1}{\mathrm{N}}) = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \alpha_k}$

On a $\lim_{x\to 0} x(\mathrm{L}(\psi))(x) = \Delta(\psi) = \ell \int_0^1 \psi = \ell \int_{1/\mathrm{e}}^1 \psi = \ell(\ln(1) - \ln(1/\mathrm{e}))$

donc par composition de limites $\boxed{\lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \alpha_k = \ell = \lim_{x\to 0} \left(x \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \mathrm{e}^{-nx} \right)}$

21. En reprenant les notations de la partie **C**. On a $\mathrm{Card}\,(\mathrm{A}(n)) = \sum_{k=0}^{n} a_k$

comme $\mathrm{A} \in \mathrm{S}$, $\lim_{x\to 0} \left(x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{e}^{-nx} \right) = \lim_{x\to 0} x f_{\mathrm{A}}(x) = \Phi(\mathrm{A})$

On peut appliquer donc le résultat précédent à la suite (a_n)

donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \mathrm{Card}\,(\mathrm{A}(n)) = \lim_{x\to 0} \left(x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{e}^{-nx} \right) = \lim_{x\to 0} x f_{\mathrm{A}}(x)$

$\boxed{\text{Si } \mathrm{A} \in \mathrm{S}, \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \mathrm{Card}\,(\mathrm{A}(n)) = \Phi(\mathrm{A})}$

Pour tout $x > 0$, la série $\sum_{n\geqslant 0} v(n)\mathrm{e}^{-nx}$ converge ayant pour somme $(f_{\mathrm{A}_1}(x))^2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v(n) \geqslant 0$

de plus $\lim_{x\to 0} x\,(f_{\mathrm{A}_1}(x))^2 = \frac{\pi}{4}$ d'après 14 et 15

On peut donc appliquer les résultats de cette partie et alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} v(k) = \frac{\pi}{4}$