

I Autour de la fonction Gamma d'Euler

I.A.1) $f(t) = t^{x-1}e^{-t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$ donc $\int_0^1 f(t)dt$ existe si et seulement si $x > 0$.

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} t^{x+1}e^{-t} = 0$, $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(\frac{1}{t^2})$ donc $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ existe pour tout x .

Le domaine de définition de Γ est donc $\mathcal{D} =]0, +\infty[$.

I.A.2) On intègre par parties pour $x > 0$: $\Gamma(x+1) = [-e^{-t}t^x]_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t} dt = x\Gamma(x)$ puisque l'expression entre crochets a pour limite 0 en 0 et en $+\infty$.

On en déduit par récurrence, pour $n \geq 1$ et $x > 0$: $\Gamma(x+n) = \Gamma(x) \prod_{k=0}^{n-1} (x+k)$.

Pour $x = 1$ on obtient avec $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$, $\Gamma(n+1) = n!$ donc $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour $n \geq 1$.

I.A.3) Dans la première intégrale on pose $t = u^{1/2}$ (bijection de classe C^1 de $]0, +\infty[$ dans lui-même):

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-u} \frac{1}{2} u^{-1/2} du = \frac{1}{2} \Gamma(1/2) = \Gamma(3/2).$$

Dans la seconde intégrale on pose $t = u^{1/4}$ (bijection de classe C^1 de $]0, +\infty[$ dans lui-même):

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^4} dt = \int_0^{+\infty} e^{-u} \frac{1}{4} u^{-3/4} du = \frac{1}{4} \Gamma(1/4) = \Gamma(5/4).$$

I.B.1) Pour $t > 0$ fixé et x variant entre a et b , $e^{x \ln t}$ est compris entre $e^{a \ln t}$ et $e^{b \ln t}$ donc $t^x \leq \max(t^a, t^b) \leq t^a + t^b$.

I.B.2) Pour $x > 0$ et $t > 0$ posons $f(x, t) = t^{x-1}e^{-t} = e^{(x-1) \ln t - t}$. On calcule $\frac{\partial f^k}{\partial x^k}(x, t) = (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t}$.

Pour $x > 0$ fixé: $|(\ln t)^k t^{x-1} e^{-t}| \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(\frac{1}{t^2})$ puisque $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{x+1} (\ln t)^k e^{-t} = 0$.

D'autre part $|(\ln t)^k t^{x-1} e^{-t}| \underset{t \rightarrow 0}{\sim} |\ln t|^k t^{x/2} \frac{1}{t^{1-x/2}} \underset{t \rightarrow 0}{=} o(\frac{1}{t^{1-x/2}})$ qui est intégrable sur $]0, 1]$ puisque $x > 0$. On en déduit que $t \mapsto \frac{\partial f^k}{\partial x^k}(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

On peut maintenant appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégral:

- Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$
- Pour tout $t \in]0, +\infty[$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$
- Pour tout $x \in]0, +\infty[$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $t \mapsto \frac{\partial f^k}{\partial x^k}(x, t)$ est continue sur $]0, +\infty[$
- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout segment $[a, b] \subset]0, +\infty[$ il existe φ continue et intégrable sur $]0, +\infty[$ telle $\left| \frac{\partial f^k}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$: en appliquant le I.B.1 on peut prendre $\varphi(t) = \left| \frac{\partial f^k}{\partial x^k}(a, t) \right| + \left| \frac{\partial f^k}{\partial x^k}(b, t) \right|$.

On en conclut pour $x > 0$: $\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t} dt$.

I.C.1) Puisque $(\ln t)^2 > 0$ pour $t \neq 1$, on a $\Gamma''(x) > 0$ et donc Γ' est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

Avec $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ on déduit que $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$. On peut appliquer le théorème de Rolle à Γ sur $[1, 2]$ puisqu'elle est de classe C^1 et que $\Gamma(1) = \Gamma(2)$. On en déduit que Γ' s'annule sur $]1, 2[$, une seule fois puisque Γ' est strictement croissante. Il existe un unique ξ tel que $\Gamma'(\xi) = 0$ et sa partie entière est égale à 1.

I.C.2) Pour $0 < x < \xi$, $\Gamma'(x) < 0$ donc Γ est strictement décroissante. Pour $x > \xi$, $\Gamma'(x) > 0$ donc Γ est strictement croissante.

De $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et de $\Gamma(1) = 1$ on déduit par continuité de Γ en 1 que $\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$ au voisinage de 0^+ et par suite Γ a pour limite $+\infty$ en 0^+ .

Puisque Γ est croissante pour $x > 2$ et que $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ on déduit que Γ a pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

De $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ on déduit $\Gamma'(x+1) = \Gamma(x) + x\Gamma'(x)$. Par continuité de Γ' en 1 et avec l'équivalent obtenu pour $\Gamma(x)$ en 0^+ on déduit que $\Gamma'(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\frac{1}{x^2}$, donc Γ' a pour limite $-\infty$ en 0^+ .

Pour $x > \xi$ on a $\Gamma'(x) > 0$ et par suite $\Gamma'(x+1) = \Gamma(x) + x\Gamma'(x) > \Gamma(x)$: on en déduit que Γ' a pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

La courbe représentative de Γ a pour asymptote la droite d'équation $x = 0$. Quand x tend vers $+\infty$ la croissance vers $+\infty$ est très rapide puisque $n!$ croît très vite vers $+\infty$.

II Une transformée de Fourier

II.A Pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$ posons $g(x, t) = e^{-t}t^{-3/4}e^{ixt}$. On calcule $\frac{\partial g^k}{\partial x^k}(x, t) = (it)^k e^{-t}t^{-3/4}e^{ixt}$.

Pour x fixé et $k \in \mathbb{N}$, $t \mapsto \left| \frac{\partial g^k}{\partial x^k}(x, t) \right| = e^{-t}t^{k-3/4}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ puisque $\Gamma(k+1/4)$ existe.

On peut appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégral en dominant la dérivée k -ième par $\varphi(t) = e^{-t}t^{k-3/4}$. F est donc de classe C^∞ et $F^{(k)}(x) = i^k \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{k-3/4}e^{ixt} dt$.

$$F(0) = \Gamma(1/4).$$

II.B.1) En utilisant le développement en série entière de e^{itx} on obtient: $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{-3/4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ixt)^n}{n!} dt$.

Appliquons le théorème d'intégration terme à terme pour la série de fonction $(\sum f_n)$ définie par $f_n(t) = e^{-t}t^{-3/4} \frac{(ixt)^n}{n!}$ (x étant fixé):

- f_n est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$ puisque $|f_n(t)| = \frac{|x|^n}{n!} e^{-t}t^{n-3/4}$ et que $\Gamma(n+1/4)$ existe.

- La série $(\sum f_n)$ converge pour tout $t > 0$.

- Si on choisit $|x| < 1$, la série de terme général $u_n = \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt$ converge.

En effet, $u_n = \frac{|x|^n}{n!} \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{n-3/4} dt = \frac{|x|^n}{n!} \Gamma(n+1/4)$. Pour $n \geq 2$, par croissance de la fonction Γ , on obtient $u_n \leq \frac{|x|^n}{n!} \Gamma(n+1) = |x|^n$ qui est le terme général d'une série géométrique convergente.

On obtient donc pour $|x| < 1$ en intégrant terme à terme: $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(ix)^n}{n!}$ avec $c_n = \Gamma(n+1/4)$.

Avec le résultat du I.A.2) on déduit: $c_n = c_0 \prod_{k=0}^{n-1} (k+1/4)$ avec $c_0 = \Gamma(1/4)$.

La croissance de la fonction Γ pour $x \geq n > 2$ entraîne que $\Gamma(n) \frac{|x|^n}{n!} \leq \left| c_n \frac{(ix)^n}{n!} \right| \leq \Gamma(n+1) \frac{|x|^n}{n!}$ et par suite $\frac{|x|^n}{n} \leq \left| c_n \frac{(ix)^n}{n!} \right| \leq |x|^n$. On en déduit que le rayon de convergence est égal à 1.

II.B.2) L'inégalité que l'on vient de montrer entraîne qu'il n'y a pas convergence absolue pour $|x| = 1$ puisque la série $(\sum \frac{1}{n})$ diverge.

II.B.3) Le développement en série entière de $F(x)$ donne son développement limité en 0 à l'ordre 3:

$$F(x) = c_0 + c_1 ix + c_2 \left(\frac{-x^2}{2}\right) + c_3 \left(\frac{-ix^3}{6}\right) + o(x^3).$$

On en déduit avec $c_1 = \frac{1}{4}c_0$, $c_2 = \frac{5}{16}c_0$ et $c_3 = \frac{45}{64}c_0$:

$R(x) = c_0(1 - \frac{5}{32}x^2) + o(x^3)$ et $I(x) = c_0(\frac{x}{4} - \frac{15}{128}x^3) + o(x^4)$ (on obtient l'ordre 4 pour $I(x)$ puisque c'est une fonction impaire).

II.C.1) Intégrons par parties: $F'(x) = i \int_0^{+\infty} t^{1/4} e^{(ix-1)t} dt = \left[it^{1/4} \frac{e^{(ix-1)t}}{(ix-1)} \right]_0^{+\infty} - \frac{i}{4(ix-1)} \int_0^{+\infty} t^{-3/4} e^{(ix-1)t} dt = -\frac{i}{4(ix-1)} F(x)$ puisque les limites en 0 et en $+\infty$ de l'expression entre crochets sont nulles. On a donc bien $F' + AF = 0$ en posant $A(x) = \frac{i}{4(ix-1)} = \frac{1}{4(x+i)}$.

II.C.2) On obtient $A(x) = \frac{x-i}{4(x^2+1)}$ dont une primitive est $G(x) = \frac{1}{8} \ln(1+x^2) - \frac{i}{4} \arctan x$.

On en déduit que $(Fe^{G'})' = (F' + FG')e^G = 0$ d'où $F(x) = Ce^{-G(x)}$ avec $C = F(0) = \Gamma(1/4)$.

On obtient donc $F(x) = \Gamma(1/4)(1+x^2)^{-1/8} e^{\frac{i}{4} \arctan x}$.

III Autour de la loi de Poisson

III.A.1) $G_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{\lambda(t-1)}$.

III.A.2) $E(X) = G'_X(1) = \lambda$.

$$V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\lambda}.$$

III.A.3) Puisque X et Y sont indépendantes on a $G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t) = e^{(\lambda+\mu)(t-1)}$ donc $X+Y$ a pour loi $\mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

III.B.1) On montre par récurrence que S_n a pour loi $\mathcal{P}(n\lambda)$.

C'est vrai pour $n = 1$ puisque $S_1 = X_1$.

Supposons, pour un entier n , que S_n a pour loi $\mathcal{P}(n\lambda)$. $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et X_{n+1} sont indépendantes donc le III.A.3) montre que $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$ a pour loi $\mathcal{P}(n\lambda + \lambda) = \mathcal{P}((n+1)\lambda)$.

Le résultat est donc vrai pour tout $n \geq 1$.

III.B.2) $E(S_n) = n\lambda$ et $\sigma(S_n) = \sqrt{n\lambda}$.

$$E(T_n) = \frac{1}{\sqrt{n\lambda}}(n\lambda - n\lambda) = 0.$$

$$\sigma(T_n) = \frac{1}{\sqrt{n\lambda}}\sigma(S_n - \lambda) = 1.$$

III.B.3) Puisque T_n possède une variance on peut lui appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev:

$$P(|T_n - E(T_n)| \geq c) \leq \frac{V(T_n)}{c^2} \text{ donc } P(|T_n| \geq c) \leq \frac{1}{c^2}. \text{ En choisissant } c \geq c(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \text{ on obtient } P(|T_n| \geq c) \leq \varepsilon.$$

III.C.1) $f'(x) = -xe^{-\frac{1}{2}x^2}$ et $f''(x) = (x^2 - 1)e^{-\frac{1}{2}x^2}$. Pour $x \geq 0$, $f'(x) \leq 0$ et f' possède un minimum égal à $f'(1) = -e^{-1/2}$. Puisque f' est impaire on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|f'(x)| \leq M = e^{-1/2}$. Cela entraîne que f est M -lipschitzienne.

III.C.2) a) Pour x fixé posons $g(h) = hf(x) - \int_x^{x+h} f(t)dt$. $|g'(h)| = |f(x) - f(x+h)| \leq Mh$ pour $h > 0$. On en

$$\text{déduit } |g(h)| = |g(h) - g(0)| = \left| \int_0^h g'(t)dt \right| \leq \int_0^h |g'(t)|dt \leq \int_0^h Mtdt = M\frac{h^2}{2}.$$

$$b) \left| \frac{1}{\sqrt{n\lambda}} \sum_{k \in I_n} f(x_{k,n}) - \int_{x_{p,n}}^{x_{q+1,n}} f(t)dt \right| = \left| \sum_{k=p}^q \left(\frac{f(x_{k,n})}{\sqrt{n\lambda}} - \int_{x_{k,n}}^{x_{k+1,n}} f(t)dt \right) \right| \leq \sum_{k=p}^q M \frac{1}{2\lambda n} = \frac{M(q+1-p)}{2\lambda n} \text{ en}$$

appliquant le a) pour $x = x_{k,n}$ et $h = \frac{1}{\sqrt{n\lambda}}$ (car $x_{k+1,n} = x_{k,n} + h$).

c) D'une part on a $p-1 < n\lambda + a\sqrt{n\lambda} \leq p$ donc $a \leq x_{p,n} < a + \frac{1}{\sqrt{n\lambda}}$. Par suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{p,n} = a$.

De même, $q \leq n\lambda + b\sqrt{n\lambda} < q+1$ donc $b - \frac{1}{\sqrt{n\lambda}} < x_{q,n} \leq b$. Par suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{q,n} = b$.

On en déduit puisque f est continue: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{x_{p,n}}^{x_{q+1,n}} f(t)dt = \int_a^b f(x)dx$.

D'autre part $0 \leq q-p \leq (b-a)\sqrt{n\lambda}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{M(q+1-p)}{2\lambda n} = 0$. On en déduit avec le b):

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n\lambda}} \sum_{k \in I_n} f(x_{k,n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{x_{p,n}}^{x_{q+1,n}} f(t)dt = \int_a^b f(x)dx.$$

III.C.3) a) Par définition, $x_{k,n}\sqrt{n\lambda} = k - n\lambda$ donc $y_{k,n} = \left(\frac{n\lambda}{k}\right)^k e^{k-n\lambda}$.

$$\text{On en déduit } \frac{\sqrt{2\pi n\lambda} e^{-n\lambda} (n\lambda)^k}{y_{k,n}} = \frac{\sqrt{2\pi n\lambda} k^k}{e^k k!} = \frac{\sqrt{2\pi} k^k}{e^k k!} \sqrt{\frac{n\lambda}{k}}.$$

Puisque $k \in I_n$, on a $1 + \frac{a}{\sqrt{n\lambda}} \leq \frac{k}{n\lambda} \leq 1 + \frac{b}{\sqrt{n\lambda}}$ donc $\frac{k}{n\lambda}$ a pour limite 1 quand n tend vers $+\infty$. Cela entraîne que k tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

D'autre part l'équivalent de Stirling entraîne que $\frac{\sqrt{2\pi k} k^k}{e^k k!}$ tend vers 1 quand k tend vers $+\infty$. Par suite, $\frac{\sqrt{2\pi n\lambda}}{y_{k,n}} e^{-n\lambda} \frac{(n\lambda)^k}{k!}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$. Il est donc compris entre $1 - \varepsilon$ et $1 + \varepsilon$ pour $n \geq N_1(\varepsilon)$ ce qui démontre le résultat demandé.

b) Pour $k \in I_n$ on a $a \leq x_{k,n} \leq b$ donc $x_{k,n}$ est borné. De plus on a montré que $\frac{k}{n\lambda}$ a pour limite 1 quand n tend vers $+\infty$ donc $\frac{x_{k,n}}{k} \sqrt{n\lambda} = x_{k,n} \frac{n\lambda}{k} \frac{1}{\sqrt{n\lambda}}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

On peut donc utiliser le développement limité $\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$ avec $t = \frac{x_{k,n}}{k} \sqrt{n\lambda}$. On obtient:

$$\begin{aligned} \ln(y_{k,n}) - \ln f(x_{k,n}) &= k \ln\left(1 - \frac{x_{k,n}}{k} \sqrt{n\lambda}\right) + x_{k,n} \sqrt{n\lambda} + \frac{1}{2} x_{k,n}^2 \\ &= k \left(-\frac{x_{k,n}}{k} \sqrt{n\lambda} - \frac{1}{2} \left(\frac{x_{k,n}}{k} \sqrt{n\lambda}\right)^2 + o\left(\left(\frac{x_{k,n}}{k} \sqrt{n\lambda}\right)^2\right) \right) + x_{k,n} \sqrt{n\lambda} + \frac{1}{2} x_{k,n}^2 \\ &= \frac{1}{2} x_{k,n}^2 \left(1 - \frac{n\lambda}{k} + o\left(\frac{n\lambda}{k}\right) \right). \end{aligned}$$

Cette expression a pour limite 0 quand n tend vers $+\infty$ puisque $x_{k,n}$ est borné et $\frac{k}{n\lambda}$ a pour limite 1.

On en déduit que $\frac{y_{k,n}}{f(x_{k,n})}$ a pour limite 1 et on obtient l'inégalité demandée pour $n \geq N_2(\varepsilon)$.

III.C.4) On déduit de la question précédente que:

$$\frac{(1-\varepsilon)^2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{n\lambda}} \sum_{k \in I_n} f(x_{k,n}) \leq \sum_{k \in I_n} \frac{(n\lambda)^k}{k!} e^{-n\lambda} \leq \frac{(1+\varepsilon)^2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{n\lambda}} \sum_{k \in I_n} f(x_{k,n}).$$

Avec le III.C.2)c) on déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k \in I_n} \frac{(n\lambda)^k}{k!} e^{-n\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b f(x) dx$.

III.C.5) $P(a \leq T_n \leq b) = P(n\lambda + a\sqrt{n\lambda} \leq S_n \leq n\lambda + b\sqrt{n\lambda}) = \sum_{k \in I_n} P(S_n = k)$ puisque S_n ne prend que des valeurs entières.

III.C.6) Puisque S_n a pour loi $\mathcal{P}(n\lambda)$, $P(a \leq T_n \leq b) = \sum_{k \in I_n} \frac{(n\lambda)^k}{k!} e^{-n\lambda}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(a \leq T_n \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b f(x) dx$.

Pour $c > a$ on a $P(T_n \geq a) = P(a \leq T_n \leq c) + P(T_n > c)$. Soit $\varepsilon > 0$. Avec la question III.B.3) on peut choisir c_1 tel que pour $c > c_1$ on ait $P(T_n > c) \leq P(|T_n| \geq c) \leq \varepsilon$. D'autre part, puisque $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, f est intégrable sur \mathbb{R}^+ , donc on peut choisir c_2 tel que pour $c > c_2$ on ait $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_a^{+\infty} f(x) dx - \int_a^c f(x) dx \right| \leq \varepsilon$.

Pour $c > \max(c_1, c_2)$ on a $\left| P(T_n \geq a) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{+\infty} f(x) dx \right| \leq 2\varepsilon + \left| P(a \leq T_n \leq c) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^c f(x) dx \right| \leq 3\varepsilon$ pour $n \geq n_0$. Par suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(T_n \geq a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{+\infty} f(x) dx$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, $P(T_n = a) \leq P(a \leq T_n \leq a + \varepsilon)$ qui tend vers $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{a+\varepsilon} f(x) dx$ quand n tend vers $+\infty$. Comme cette intégrale peut être arbitrairement proche de 0, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(T_n = a) = 0$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(T_n > a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(T_n \geq a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(T_n \leq b) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} P(T_n > b) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_b^{+\infty} f(x) dx.$$

III.D.1) Avec le III.B.3) on a pour $b \leq -c(\varepsilon)$: $P(T_n \leq b) \leq P(T_n \geq |b|) \leq \varepsilon$. On en déduit avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(T_n \leq b) =$

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_b^{+\infty} f(x) dx \text{ que } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \sqrt{2\pi}.$$

III.D.2) $e^{-n\lambda}A_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n\lambda \rfloor} P(S_n = k) = P(S_n \leq n\lambda)$ puisque S_n ne prend que des valeurs entières.

On a donc $e^{-n\lambda}A_n = P(T_n \leq 0)$ qui tend vers $1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{2}$ par parité de la fonction f .

On a donc $A_n \sim \frac{1}{2}e^{n\lambda}$.

$e^{-n\lambda}(A_n + B_n) = 1 + e^{-n\lambda} \frac{(n\lambda)^k}{k!}$ avec $k = \lfloor n\lambda \rfloor$. Comme $k \leq n\lambda < k+1$ on a :

$e^{-n\lambda} \frac{(n\lambda)^k}{k!} \leq e^{-k} \frac{(k+1)^k}{k!} \sim (1 + \frac{1}{k})^k \frac{1}{\sqrt{2\pi k}}$ qui tend vers 0 puisque k tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ et $(1 + \frac{1}{k})^k$ a pour limite e . Par suite $B_n \sim \frac{1}{2}e^{n\lambda}$.

III.D.3) $e^{-n\lambda}C_n = \sum_{k=0}^n P(S_n = k) = P(S_n \leq n) = P(T_n \leq \frac{1-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{n})$.

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe b tel que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^b f(x)dx \geq 1 - \varepsilon$. Puisque $1 - \lambda > 0$, on a $\frac{1-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{n} \geq b$ pour $n \geq n_1$.

On a alors $e^{-n\lambda}C_n \geq P(T_n \leq b)$ qui tend vers $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^b f(x)dx \geq 1 - \varepsilon$. On en déduit, puisque que $e^{-n\lambda}C_n \leq 1$ (c'est une probabilité), que $e^{-n\lambda}C_n$ a pour limite 1 si $\lambda < 1$.

$e^{-n\lambda}D_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(S_n = k) = P(S_n > n) = P(T_n > \frac{1-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{n})$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $a < 0$ tel que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{+\infty} f(x)dx \geq 1 - \varepsilon$. Puisque $1 - \lambda < 0$, on a $\frac{1-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{n} \leq a$ pour $n \geq n_2$. On a alors $e^{-n\lambda}D_n \geq P(T_n > a)$ qui tend vers $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{+\infty} f(x)dx \geq 1 - \varepsilon$. On en déduit, puisque que $e^{-n\lambda}D_n \leq 1$ (c'est une probabilité), que $e^{-n\lambda}D_n$ a pour limite 1 si $\lambda > 1$.

III.E.1) $(n\lambda)^{-n} \int_0^{n\lambda} (n\lambda - t)^n e^t dt = \int_0^{n\lambda} \left(1 - \frac{t}{n\lambda}\right)^n e^t dt$.

Définissons $f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n\lambda}\right)^n e^t$ si $t < n\lambda$ et $f_n(t) = 0$ si $t \geq n\lambda$ et utilisons le théorème de convergence dominée pour calculer la limite de $\int_0^{+\infty} f_n(t)dt$.

Chaque fonction f_n est continue sur \mathbb{R}^+ (la limite à gauche en $t = n\lambda$ de $f_n(t)$ est égale à 0).

Pour $n > t$ on a $f_n(t) = e^{t+n \ln(1 - \frac{t}{n\lambda})}$ qui a pour limite $f(t) = e^{t(1 - \frac{1}{\lambda})}$ quand n tend vers $+\infty$, puisque $n \ln(1 - \frac{t}{n\lambda}) \sim -\frac{t}{\lambda}$. La suite (f_n) converge donc simplement vers la fonction f qui est continue sur \mathbb{R}^+ .

La majoration connue $\ln(1+x) \leq x$ entraîne pour $t < n\lambda$ que $f_n(t) \leq e^{t(1 - \frac{1}{\lambda})} = f(t)$. C'est aussi vérifié pour $t \geq n\lambda$ puisque $f_n(t) = 0$. La fonction f est intégrable sur $[0, +\infty[$ puisque $1 - \frac{1}{\lambda} < 0$.

Le théorème de convergence dominée s'applique et donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left((n\lambda)^{-n} \int_0^{n\lambda} (n\lambda - t)^n e^t dt \right) = \int_0^{+\infty} f(t)dt = \left[\frac{e^{t(1 - \frac{1}{\lambda})}}{(1 - \frac{1}{\lambda})} \right]_0^{+\infty} = \frac{\lambda}{1 - \lambda}.$$

III.E.2) Appliquons la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n pour la fonction \exp sur l'intervalle $[0, n\lambda]$:

$$e^{n\lambda} = \sum_{k=0}^n \frac{(n\lambda)^k}{k!} + \int_0^{n\lambda} \frac{(n\lambda - t)^n}{n!} e^t dt. \text{ On en déduit avec le résultat du III.E.1):}$$

$$D_n = e^{n\lambda} - \sum_{k=0}^n \frac{(n\lambda)^k}{k!} = \int_0^{n\lambda} \frac{(n\lambda - t)^n}{n!} e^t dt \sim \frac{\lambda}{1 - \lambda} \frac{(n\lambda)^n}{n!} \text{ quand } \lambda < 1.$$

III.F Intégrons par parties: $\int_{-\infty}^0 \frac{(r-t)^n}{n!} e^t dt = \left[\frac{(r-t)^n}{n!} e^t \right]_{-\infty}^0 + \int_{-\infty}^0 \frac{(r-t)^{n-1}}{(n-1)!} e^t dt$. C'est légitime: les intégrales existent car $(r-t)^n e^t = o(\frac{1}{t^2})$ en $-\infty$ et l'expression entre crochets a une limite en 0 et en $-\infty$. On obtient $\int_{-\infty}^0 \frac{(r-t)^n}{n!} e^t dt = \frac{r^n}{n!} + \int_{-\infty}^0 \frac{(r-t)^{n-1}}{(n-1)!} e^t dt$. On continue à intégrer par parties et on montre par récurrence sur k que:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{(r-t)^n}{n!} e^t dt = \frac{r^n}{n!} + \dots + \frac{r^{n-k+1}}{(n-k+1)!} + \int_{-\infty}^0 \frac{(r-t)^{n-k}}{(n-k)!} e^t dt.$$

On obtient finalement pour $k = n$: $\int_{-\infty}^0 \frac{(r-t)^n}{n!} e^t dt = \frac{r^n}{n!} + \dots + \frac{r^1}{1!} + \int_{-\infty}^0 e^t dt$ qui est égal à C_n si on choisit $r = n\lambda$.

$$\text{On a donc } C_n = \frac{(n\lambda)^n}{n!} \int_{-\infty}^0 \left(1 - \frac{t}{n\lambda}\right)^n e^t dt.$$

Appliquons à nouveau le théorème de convergence dominée pour calculer la limite de $\int_{-\infty}^0 g_n(t) dt$ avec $g_n(t) =$

$$\left(1 - \frac{t}{n\lambda}\right)^n e^t:$$

Chaque fonction g_n est continue sur \mathbb{R}^- .

Puisque $t \leq 0$ on peut écrire $g_n(t) = e^{t+n \ln(1-\frac{t}{n\lambda})}$ qui a pour limite $f(t) = e^{t(1-\frac{1}{\lambda})}$ quand n tend vers $+\infty$ (comme à la question III.E.1) avec f qui est continue sur \mathbb{R}^- .

La majoration connue $\ln(1+x) \leq x$ entraîne que $g_n(t) \leq e^{t(1-\frac{1}{\lambda})} = f(t)$. La fonction f est intégrable sur $]-\infty, 0]$ puisque $1 - \frac{1}{\lambda} > 0$.

Le théorème de convergence dominée s'applique et donc:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^0 g_n(t) dt = \int_{-\infty}^0 f(t) dt = \left[\frac{e^{t(1-\frac{1}{\lambda})}}{(1-\frac{1}{\lambda})} \right]_{-\infty}^0 = \frac{\lambda}{\lambda-1}.$$

On en déduit que $C_n \sim \frac{\lambda}{\lambda-1} \frac{(n\lambda)^n}{n!}$ quand $\lambda > 1$.