Exercice n°3

1. La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

Sur $]0, 1]$ On a $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

donc la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ est prolongeable par continuité en 0

donc l'intégrale est faussement impropre sur $[0, 1]$ d'où l'existence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$

Sur $[1, +\infty[$ Soit $\mathrm{A} > 1$

On effectue une intégration par parties avec des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[1, \mathrm{A}]$:

On obtient (1) : $\displaystyle\int_1^{\mathrm{A}} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \left[\frac{-\cos x}{x}\right]_1^{\mathrm{A}} - \int_1^{\mathrm{A}} \frac{+\cos x}{x^2} \mathrm{d}x = \cos(1) - \frac{\cos \mathrm{A}}{\mathrm{A}} - \int_1^{\mathrm{A}} \frac{\cos x}{x^2} \mathrm{d}x$

Or $\lim\limits_{\mathrm{A} \to +\infty} \dfrac{\cos \mathrm{A}}{\mathrm{A}} = 0$ (2)

et la fonction $x \mapsto \dfrac{\cos x}{x^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$

et $\forall x \in [1, +\infty[$, $0 \leq \left|\dfrac{\cos x}{x^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{x^2}$

Or la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ par critère de Riemann à distance infinie car $2 > 1$

Par comparaison à une fonction positive $x \mapsto \dfrac{|\cos x|}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$

d'où l'existence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} \mathrm{d}x$

Par passage à la limite dans (1) (avec (2)) on obtient l'existence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$

En conclusion $\boxed{\text{L'intégrale } \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x \text{ existe}}$

On pouvait aussi faire une intégration par parties généralisée en commençant par vérifier que le crochet était convergent.

2. (a) Quand $t \longrightarrow 0$, on a $\alpha t \longrightarrow 0$

donc $\cos(\alpha t) = 1 - \frac{\alpha^2 t^2}{2} + \mathrm{o}(t^2)$

ainsi $1 - \cos(\alpha t) = \frac{\alpha^2 t^2}{2} + \mathrm{o}(t^2) \sim \frac{\alpha^2 t^2}{2}$ car $\alpha \neq 0$

donc $\dfrac{1 - \cos(\alpha t)}{t^2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx} \sim \frac{\alpha^2 t^2}{2t^2} 1$

donc $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{1 - \cos(\alpha t)}{t^2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx} = \dfrac{\alpha^2}{2}$

donc $\boxed{\text{l'application } t \mapsto \dfrac{1 - \cos(\alpha t)}{t^2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx} \text{ est prolongeable par continuité en } 0}$

(b) L'application $t \mapsto \dfrac{1 - \cos(\alpha t)}{t^2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}$ ainsi prolongée est continue sur $\mathbb{R}$.

Sur $[1, +\infty[$ on a pour $t \geqslant 1$, $\left|\dfrac{1 - \cos(\alpha t)}{t^2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\right| \leqslant \dfrac{1 + |\cos(\alpha t)|}{t^2} |\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}| \leqslant \dfrac{2}{t^2}$

Comme en 1., on obtient l'intégrabilité de $t \mapsto \dfrac{1 - \cos(\alpha t)}{t^2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}$ sur $[1, +\infty[$

Sur $]-\infty, -1]$ de façon analogue $t \mapsto \dfrac{1 - \cos(\alpha t)}{t^2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}$ est intégrable sur $]-\infty, -1]$

$\boxed{\text{Le prolongement par continuité de } t \mapsto \dfrac{1 - \cos(\alpha t)}{t^2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}}$

3. (a) On a $\mathrm{I} \in \mathbb{C}$.

Et $\overline{\mathrm{I}} = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\left(\frac{1-\cos(\alpha t)}{t^2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\right)} \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos(\alpha t)}{t^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} \mathrm{d}t$

On effectue le changement de variable affine $u = -t$; $-\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$ ($\mathcal{C}^1$, bijectif, strictement décroissante)

ainsi $\overline{\mathrm{I}} = -\displaystyle\int_{+\infty}^{-\infty} \frac{1-\cos(-\alpha u)}{(-u)^2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ux} \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos(\alpha t)}{t^2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx} \mathrm{d}t = \mathrm{I}$

Ce qui prouve que $\boxed{\text{I est réelle}}$

(b) On effectue un changement de variable affine, bijectif car $\mathrm{B} > 0$, $t = \mathrm{B}x$; $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{B}} = \mathrm{d}x$ à partir d'une intégrale convergente

Ainsi $\displaystyle\int_{\mathrm{A}}^{+\infty} \frac{\cos(\mathrm{B}x)}{x^2} \mathrm{d}x = \int_{\mathrm{AB}}^{+\infty} \frac{\mathrm{B}^2 \cos(t)}{t^2} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{B}} = \mathrm{B} \int_{\mathrm{AB}}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} \mathrm{d}t$

On veut effectue ensuite une intégration par parties :

Les fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathrm{B}\left[-\dfrac{\cos(t)}{t}\right]_{t=\mathrm{AB}}^{t\to+\infty}$ est un crochet convergent. Donc les intégrales $\displaystyle\int_{\mathrm{A}}^{+\infty} \frac{\cos(\mathrm{B}x)}{x^2} \mathrm{d}x$ et $\mathrm{B}\displaystyle\int_{\mathrm{AB}}^{+\infty} \frac{+\sin(t)}{t} \mathrm{d}t$ ont même nature et :

$$\int_{\mathrm{A}}^{+\infty} \frac{\cos(\mathrm{B}x)}{x^2} \mathrm{d}x = \mathrm{B}\left[-\frac{\cos(t)}{t}\right]_{t=\mathrm{AB}}^{t\to+\infty} - \mathrm{B}\int_{\mathrm{AB}}^{+\infty} \frac{+\sin(t)}{t} \mathrm{d}t$$

$$\boxed{\int_{\mathrm{A}}^{+\infty} \frac{\cos(\mathrm{B}x)}{x^2} \mathrm{d}x = \frac{\cos(\mathrm{AB})}{\mathrm{A}} - \mathrm{B}\int_{\mathrm{AB}}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t}$$

(c) On suppose $\mathrm{B} > 0$.

Soit $\mathrm{A} > 0$. On a $\displaystyle\int_{\mathrm{A}}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_{x=\mathrm{A}}^{x\to+\infty} = \frac{1}{\mathrm{A}}$

donc $\displaystyle\int_{\mathrm{A}}^{+\infty} \frac{1-\cos(\mathrm{B}x)}{x^2} \mathrm{d}x = \frac{1-\cos(\mathrm{AB})}{\mathrm{A}} + \mathrm{B}\int_{\mathrm{AB}}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t$

Par un calcul asymptotique comme en 2(a), on a $\displaystyle\lim_{\mathrm{A}\to 0} \frac{1-\cos(\mathrm{AB})}{\mathrm{A}} = 0$

à l'aide de 1 on a $\displaystyle\lim_{u\to 0} \int_{u}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$

et donc par passage à la limite on obtient $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1-\cos(\mathrm{B}x)}{x^2} \mathrm{d}x = \mathrm{B}\frac{\pi}{2}$

si $\mathrm{B} < 0$, on a $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1-\cos(\mathrm{B}x)}{x^2} \mathrm{d}x = \int_{0}^{+\infty} \frac{1-\cos(-\mathrm{B}x)}{x^2} \mathrm{d}x = -\mathrm{B}\frac{\pi}{2}$

si $\mathrm{B} = 0$, on a $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1-\cos(\mathrm{B}x)}{x^2} \mathrm{d}x = 0$

donc $\boxed{\text{dans le cas général on a } \displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1-\cos(\mathrm{B}x)}{x^2} \mathrm{d}x = \frac{|\mathrm{B}|\pi}{2}}$

(d) Comme I est réelle, on a $\mathrm{I} = \Re e(\mathrm{I}) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos(\alpha t)}{t^2} \cos(tx) \mathrm{d}t$

puis par parité $\mathrm{I} = 2\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(tx) - \cos(tx)\cos(\alpha t)}{t^2} \mathrm{d}t$

En utilisant la formule $2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$

on obtient $\mathrm{I} = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\cos(tx) - \cos(t(x+\alpha)) - \cos(t(x-\alpha))}{t^2} \mathrm{d}t$

Pour utiliser : $\forall \mathrm{B} \in \mathbb{R},\ \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(\mathrm{B}t)}{t^2}\mathrm{d}t = \frac{|\mathrm{B}|\pi}{2}$

on écrit $\mathrm{I} = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1-\cos(t(x+\alpha))) + (1-\cos(t(x-\alpha))) - 2(1-\cos(tx))}{t^2}\mathrm{d}t$

donc $\boxed{\mathrm{I} = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos(\alpha t)}{t^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\mathrm{d}t = \frac{|x+\alpha| + |x-\alpha| - 2|x|}{2}\pi}$