

Centrale, 2015, MP, II

(10 pages)

Partie I

I.A -

I.A.1) Pour $n \geq 2$, on a
$$a_n = \frac{1}{n} - \int_{n-1}^n \frac{dt}{t} = \frac{1}{n} - [\ln(t)]_{n-1}^n = \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$$

$$= \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

donc $a_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$ donc, par comparaison à une série de Riemann, $(\sum a_n)_{n \geq 2}$ converge.

I.A.2) \diamond Puisque $\forall k \geq 2$, $a_k = \frac{1}{k} - \ln(k) + \ln(k-1)$, par télescopage, $\sum_{k=2}^n a_k = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} - \ln(n) = H_n - 1 - \ln(n)$

donc $H_n = \ln(n) + 1 + \sum_{k=2}^n a_k = \ln(n) + 1 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k + o(1)$ puisque la série $(\sum a_n)_{n \geq 2}$ converge.

Ainsi $\exists A \in \mathbb{R}$, $H_n \underset{+\infty}{=} \ln(n) + A + o(1)$.

\diamond On en déduit directement $\underline{H_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ln(n)}$.

I.B - Si $r \leq 1$, on a $(n+1)^r \frac{H_n}{(n+1)^r} = H_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ donc, par comparaison à la série de Riemann divergente $(\sum \frac{1}{(n+1)^r})$, $(\sum \frac{H_n}{(n+1)^r})$ diverge.

Si $r > 1$, prenons s tel que $r > s > 1$, on a $\frac{H_n}{(n+1)^r} = \frac{H_n}{(n+1)^{r-s}} \frac{1}{(n+1)^s} = o\left(\frac{1}{(n+1)^s}\right)$ car

$\frac{H_n}{(n+1)^{r-s}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{(n+1)^{r-s}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ puisque $r-s > 0$. Par comparaison à la série de Riemann convergente $(\sum \frac{1}{(n+1)^s})$, $(\sum \frac{H_n}{(n+1)^r})$ converge.

On conclut que : $\underline{(\sum \frac{H_n}{(n+1)^r})_{n \geq 1}}$ converge si et seulement si $r > 1$.

I.C -

I.C.1) $\diamond \forall t \in]-1, 1[$, $\ln(1-t) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n}$ (rayon de convergence $R = 1$).

$\diamond \forall t \in]-1, 1[$, $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$ (rayon de convergence $R = 1$).

I.C.2) Le produit de Cauchy des deux séries ci-dessus a donc un rayon de convergence supérieur ou égal à 1 et on a

$$\forall t \in]-1, 1[, \frac{\ln(1-t)}{1-t} = -\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n}\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} t^n\right) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) t^n.$$

Donc $t \mapsto \frac{\ln(1-t)}{1-t}$ est développable en série entière sur $] -1, 1[$ et $\forall t \in]-1, 1[$, $\frac{\ln(1-t)}{1-t} = -\sum_{n=1}^{+\infty} H_n t^n$.

I.D -

I.D.1) Pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, $t \mapsto t^p (\ln t)^q$ est continue sur $]0, 1]$ et $\sqrt{t} t^p (\ln t)^q = t^{p+1/2} (\ln t)^q \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{ } 0$ car $p + \frac{1}{2} > 0$, soit $t^p (\ln t)^q = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ donc $t \mapsto t^p (\ln t)^q$ est intégrable sur $]0, 1]$ et donc $I_{p,q}$ existe pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.

I.D.2) $t \mapsto \frac{t^{p+1}}{p+1}$ et $t \mapsto (\ln t)^q$ sont de classe C^1 sur le segment $[\varepsilon, 1]$ donc par intégration par parties,

$$I_{p,q}^\varepsilon = \left[\frac{t^{p+1}}{p+1} (\ln t)^q \right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{t^{p+1}}{p+1} q \frac{(\ln t)^{q-1}}{t} dt$$

$$\text{soit } \forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}^*, \forall \varepsilon \in]0, 1[, \quad \underline{I_{p,q}^\varepsilon = -\frac{q}{p+1} I_{p,q-1}^\varepsilon - \frac{\varepsilon^{p+1}}{p+1} (\ln \varepsilon)^q .}$$

I.D.3) Puisque $p \geq 0$ et $q \geq 1$, selon [1], $I_{p,q-1}^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0^+]{ } I_{p,q-1}$ et $I_{p,q}^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0^+]{ } I_{p,q}$. De plus, $\varepsilon^{p+1} (\ln \varepsilon)^q \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0^+]{ } 0$ donc, à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$, la formule du [2] donne $\underline{I_{p,q} = -\frac{q}{p+1} I_{p,q-1}}$.

I.D.4) On a donc $I_{p,q} = \left(-\frac{q}{p+1}\right) \left(-\frac{q-1}{p+1}\right) \cdots \left(-\frac{1}{p+1}\right) I_{0,q} = (-1)^q \frac{q!}{(p+1)^{q+1}} I_{0,q}$ avec $I_{0,q} = \int_0^1 t^p dt = \frac{1}{p+1}$ donc $\underline{I_{p,q} = (-1)^q \frac{q!}{(p+1)^{q+1}}$.

I.E - On a $\forall t \in]0, 1[, (\ln t)^{r-1} f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n (\ln t)^{r-1}$. Posons, pour $t \in]0, 1[, u_n(t) = a_n t^n (\ln t)^{r-1}$. On a :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est continue sur $]0, 1[$ et, d'après [2], u_n est intégrable sur $]0, 1]$, donc sur $]0, 1[$, car $r \in \mathbb{N}^*$;
- selon ci-dessus, $\sum u_n$ converge simplement sur $]0, 1[$ vers $t \mapsto (\ln t)^{r-1} f(t)$ qui est continue sur $]0, 1[$;
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 |u_n(t)| dt = |a_n| \int_0^1 t^n |(\ln t)^{r-1}| dt = (-1)^{r-1} |a_n| I_{n,r-1} = (r-1)! \frac{|a_n|}{(n+1)^r}$ et, par hypothèse, $\left(\sum \frac{|a_n|}{(n+1)^r}\right)$ converge donc $\left(\sum \int_0^1 |u_n(t)| dt\right)$ converge.

Le théorème d'intégration terme à terme s'applique et, sachant

$$\int_0^1 u_n(t) dt = a_n I_{n,r-1} = (-1)^{r-1} (r-1)! \frac{a_n}{(n+1)^r},$$

$$\text{on obtient : } \underline{\int_0^1 (\ln t)^{r-1} f(t) dt = (-1)^{r-1} (r-1)! \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{(n+1)^r} .}$$

I.F -

I.F.1) Pour $r \geq 2$, on applique [E] à $f : t \mapsto \frac{\ln(1-t)}{1-t}$ qu'on sait depuis [C.3] être développable en série entière sur $] -1, 1[$ avec comme coefficient de t^n dans ce développement, $a_n = -H_n$. C'est légitime puisque $\left(\sum \frac{|a_n|}{(n+1)^r}\right) = \left(\sum \frac{H_n}{(n+1)^r}\right)$ est alors convergente d'après [B].

On obtient donc $\int_0^1 (\ln t)^{r-1} \frac{\ln(1-t)}{1-t} dt = (-1)^{r-1} (r-1)! \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-H_n}{(n+1)^r}$ soit

$$\underline{\forall r \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, S_r = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n}{(n+1)^r} = \frac{(-1)^r}{(r-1)!} \int_0^1 (\ln t)^{r-1} \frac{\ln(1-t)}{1-t} dt .}$$

I.F.2) Pour $[c, d] \subset]0, 1[$, on a, par intégration par parties,

$$\begin{aligned} \int_c^d \frac{\ln(1-t)}{1-t} (\ln t)^{r-1} dt &= \left[-\frac{(\ln(1-t))^2}{2} (\ln t)^{r-1} \right]_c^d + \frac{r-1}{2} \int_c^d \frac{(\ln(1-t))^2 (\ln t)^{r-2}}{t} dt \\ &= \frac{(\ln(1-c))^2 (\ln c)^{r-1}}{2} - \frac{(\ln(1-d))^2 (\ln d)^{r-1}}{2} + \frac{r-1}{2} \int_c^d \frac{(\ln(1-t))^2 (\ln t)^{r-2}}{t} dt. \end{aligned}$$

Or $(\ln(1-c))^2 (\ln c)^{r-1} \underset{c \rightarrow 0^+}{\sim} c^2 (\ln c)^{r-1} \xrightarrow{c \rightarrow 0^+} 0$, $(\ln(1-d))^2 (\ln d)^{r-1} \underset{d \rightarrow 1^-}{\sim} (\ln(1-d))^2 (d-1)^{r-1} \xrightarrow{d \rightarrow 1^-} 0$
car $r-1 > 0$. Enfin $\omega : t \mapsto \frac{(\ln(1-t))^2 (\ln t)^{r-2}}{t}$ est continue sur $]0, 1[$, $\omega(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t (\ln t)^{r-2} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$
donc φ est prolongeable par continuité en 0, $\sqrt{1-t} \omega(t) \underset{t \rightarrow 1^-}{\sim} (-1)^{r-2} (\ln(1-t))^2 (1-t)^{r-3/2} \xrightarrow{t \rightarrow 1^-} 0$
(car $r > 3/2$) donc $\omega(t) \underset{t \rightarrow 1^-}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$ et donc ω est intégrable sur $]0, 1[$. Tout ceci justifie un passage à la limite pour $(c, d) \rightarrow (0, 1)$ et donne, avec le résultat du [1], la formule

$$\forall r \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, S_r = \frac{(-1)^r}{2(r-2)!} \int_0^1 \frac{(\ln(1-t))^2 (\ln t)^{r-2}}{t} dt.$$

I.F.3) \diamond En particulier, $S_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(\ln(1-t))^2}{t} dt$. Effectuons dans cette intégrale le changement de variable

C^1 et strictement décroissant $u = 1-t$, on obtient $S_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(\ln u)^2}{1-u} du$.

\diamond Appliquons le résultat du [E] à $r = 3$ et $f : t \mapsto \frac{1}{1-t}$ qui est bien développable en série entière sur $] -1, 1[$ avec comme coefficient de t^n dans son développement, $a_n = 1$ donc $\left(\sum \frac{|a_n|}{(n+1)^3} \right) = \left(\sum \frac{1}{(n+1)^3} \right)$, série de Riemann convergente. On a donc $\int_0^1 \frac{(\ln u)^2}{1-u} du = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^3} = 2\zeta(3)$ et donc $S_2 = \zeta(3)$.

Partie II

II.A -

II.A.1) $\gamma : t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$, $\gamma(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$ avec $1-x < 1$ et $t^2 t^{x-1} e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$
donc $\gamma(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

II.A.2) Par le changement de variable C^1 et strictement croissant $u = \frac{t}{\alpha}$ dans l'intégrale définissant Γ , on a

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} (\alpha u)^{x-1} e^{-\alpha u} \alpha du = \alpha^x \int_0^{+\infty} u^{x-1} e^{-\alpha u} du$$

donc $\int_0^{+\infty} u^{x-1} e^{-\alpha u} du$ existe et $\int_0^{+\infty} u^{x-1} e^{-\alpha u} du = \frac{\Gamma(x)}{\alpha^x}$.

II.B -

II.B.1) Pour $x > 0$ et $y > 0$, $\phi : t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue sur $]0, 1[$, $\phi(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$ avec $1-x < 1$ et $\phi(t) \underset{t \rightarrow 1^-}{\sim} (1-t)^{y-1} = \frac{1}{(1-t)^{1-y}}$ avec $1-y < 1$ donc ψ est intégrable sur $]0, 1[$ et donc $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ existe .

II.B.2) Le changement de variable C^1 et strictement décroissant $u = 1-t$ donne $\beta(x, y) = \int_1^0 (1-u)^{x-1}u^{y-1} (-du)$ soit $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\beta(x, y) = \beta(y, x)$.

II.B.3) Par intégration par parties avec $u(t) = t^x$ et $v'(t) = (1-t)^{y-1}$, on a, puisque tous les termes existent,

$$\begin{aligned} \beta(x+1, y) &= \int_0^1 t^x(1-t)^{y-1} dt = \left[-\frac{t^x(1-t)^y}{y} \right]_0^1 + \frac{x}{y} \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y dt \\ &= \frac{x}{y} \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}(1-t) dt = \frac{x}{y} \int_0^1 (t^{x-1}(1-t)^{y-1} - t^x(1-t)^{y-1}) dt \\ &= \frac{x}{y} [\beta(x, y) - \beta(x+1, y)] \end{aligned}$$

donc $\frac{x+y}{y}\beta(x+1, y) = \frac{x}{y}\beta(x, y)$ et donc $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\beta(x+1, y) = \frac{x}{x+y}\beta(x, y)$.

II.B.4) Selon [3&2], $\beta(x+1, y+1) = \frac{x}{x+y+1}\beta(x, y+1) = \frac{x}{x+y+1}\beta(y+1, x) = \frac{x}{x+y+1} \frac{y}{x+y}\beta(y, x) = \frac{x}{x+y+1} \frac{y}{x+y}\beta(x, y)$ donc $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\beta(x+1, y+1) = \frac{xy}{(x+y)(x+y+1)}\beta(x, y)$.

II.C -

II.C.1) Si la relation (\mathcal{R}) est vraie pour $x > 1$ et $y > 1$, on a, selon [B.4]

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \beta(x, y) &= \frac{(x+y)(x+y+1)}{xy} \beta(x+1, y+1) \underset{(\mathcal{R})}{=} \frac{(x+y)(x+y+1)}{xy} \frac{\Gamma(x+1)\Gamma(y+1)}{\Gamma(x+y+2)} \\ &= \frac{(x+y)(x+y+1)}{xy} \frac{x\Gamma(x)y\Gamma(y)}{(x+y+1)(x+y)\Gamma(x+y)} = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \end{aligned}$$

donc si (\mathcal{R}) est vraie pour $x > 1$ et $y > 1$ alors elle est vérifiée pour tout $x > 0$ et $y > 0$.

II.C.2) Soit $\theta(u) = \frac{u}{1+u}$, θ est C^1 sur $]0, +\infty[$ avec $\forall u > 0$, $\theta'(u) = \frac{1}{(1+u)^2}$ donc θ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et on a $\lim_{u \rightarrow 0^+} \theta(u) = 0$ et $\lim_{u \rightarrow +\infty} \theta(u) = 1$. Ainsi le changement de variable $t = \theta(u)$ dans $\beta(x, y)$ donne

$$\beta(x, y) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{1+u} \right)^{x-1} \left(\frac{1}{1+u} \right)^{y-1} \frac{du}{(1+u)^2}$$

soit $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\beta(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} du$.

II.C.3) Puisque $x+y-1 > 0$, $t \mapsto e^{-t}t^{x+y-1}$ est continue sur \mathbb{R}_+ donc la primitive de cette fonction qui s'annule en 0 est $F_{x,y} : t \mapsto \int_0^t e^{-u}u^{x+y-1} du$ et, comme $\forall u \in [0, +\infty[$, $e^{-u}u^{x+y-1} \geq 0$ et que $\Gamma(x+y)$ existe, on a bien $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $F_{x,y}(t) \leq \Gamma(x+y)$.

II.C.4) Soit $g : (a, u) \mapsto \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} F_{x,y}((1+u)a)$. On a :

- $\forall u \in [0, +\infty[$, $a \mapsto g(a, u)$ est continue sur \mathbb{R}_+ car $F_{x,y}$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+ ;
- $\forall a \in \mathbb{R}_+$, $u \mapsto g(a, u)$ est continue (par morceaux) sur $[0, +\infty[$ car $x - 1 > 0$ et $F_{x,y}$ de classe C^1 sur \mathbb{R}_+ ;
- $\forall a \in \mathbb{R}_+$, $\forall u \in [0, +\infty[$, $|g(a, u)| \leq \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} \Gamma(x+y)$ d'après [3] et $u \mapsto \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} \Gamma(x+y)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ selon [2].

Le théorème de continuité des intégrales à paramètre donne que G est définie et continue sur \mathbb{R}_+ .

II.C.5) On peut appliquer le théorème de convergence dominée pour $a \rightarrow +\infty$ car:

- $\forall u \in [0, +\infty[$, $a(1+u) \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} +\infty$ donc $\forall u \in [0, +\infty[$, $g(a, u) \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} \Gamma(x+y)$;
- $u \mapsto \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} \Gamma(x+y)$ est continue (par morceaux) sur $[0, +\infty[$;
- on a la domination vue au [4]: $\forall a \in \mathbb{R}_+$, $\forall u \in [0, +\infty[$, $|g(a, u)| \leq \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} \Gamma(x+y)$ avec $u \mapsto \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} \Gamma(x+y)$ intégrable sur $[0, +\infty[$.

Donc $G(a) \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} \Gamma(x+y) du$ soit, avec [2], $\lim_{a \rightarrow +\infty} G(a) = \Gamma(x+y) \beta(x, y)$.

II.C.6) \diamond Avec la notation du [4] et $[c, d] \subset \mathbb{R}_+^*$:

- $\forall a \in \mathbb{R}_+$, $u \mapsto g(a, u)$ est continue (par morceaux) et intégrable sur $[0, +\infty[$;
- $\forall a \in \mathbb{R}_+$, $\forall u \in [0, +\infty[$, $\frac{\partial g}{\partial a}(a, u) = \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} (1+u) F'_{x,y}((1+u)a) = \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} (1+u) e^{-(1+u)a} ((1+u)a)^{x+y-1} = a^{x+y-1} e^{-(1+u)a} u^{x-1}$ existe;
- $\forall u \in [0, +\infty[$, $a \mapsto \frac{\partial g}{\partial a}(a, u)$ est continue sur \mathbb{R}_+ car $x+y-1 > 0$;
- $\forall a \in \mathbb{R}_+$, $u \mapsto \frac{\partial g}{\partial a}(a, u)$ est continue (par morceaux) sur $[0, +\infty[$ car $x-1 > 0$;
- $\forall a \in [c, d]$, $\forall u \in [0, +\infty[$, $\left| \frac{\partial g}{\partial a}(a, u) \right| \leq d^{x+y-1} e^{-(1+u)c} u^{x-1} = d^{x+y-1} e^{-c} e^{-cu} u^{x-1}$ et $u \mapsto e^{-cu} u^{x-1}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ selon [A.2] puisque $c > 0$.

Ainsi le théorème de dérivation des intégrales à paramètre donne que G est de classe C^1 sur $[c, d]$.

\diamond Ceci étant valable pour tout $[c, d] \subset \mathbb{R}_+^*$, on a G de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* .

II.C.7) De plus, la formule de dérivation donne, dans ce cas,

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, G'(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial a}(a, u) du = a^{x+y-1} e^{-a} \int_0^{+\infty} e^{-au} u^{x-1} du$$

soit, avec le résultat de [A.2], $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$, $G'(a) = \Gamma(x) a^{y-1} e^{-a}$.

II.C.8) On a donc $\forall (a, a') \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $G(a) - G(a') = \int_{a'}^a G'(t) dt = \Gamma(x) \int_{a'}^a t^{y-1} e^{-t} dt$. Or $G(a) \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} \Gamma(x+y) \beta(x, y)$ d'après [5], $G(a') \xrightarrow{a' \rightarrow 0} G(0)$ car G est continue en 0 selon [4] ce qui donne $G(a') \xrightarrow{a' \rightarrow 0} 0$ car $F_{x,y}(0) = 0$. D'autre part, $\int_{a'}^a t^{y-1} e^{-t} dt \xrightarrow{(a, a') \rightarrow (+\infty, 0)} \Gamma(y)$ donc, en passant à la limite, on obtient $\Gamma(x+y) \beta(x, y) - 0 = \Gamma(x) \Gamma(y)$, or $\Gamma(x+y) \neq 0$, donc $\forall x > 1, \forall y > 1$, $\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

Partie III

III.A - $\forall x > 0$, $\ln(\Gamma(x+1)) - \ln(\Gamma(x)) = \ln \left[\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)} \right] = \ln x$ donc, en dérivant, $\forall x > 0$, $\psi(x+1) - \psi(x) = \frac{1}{x}$.

III.B -

III.B.1) \diamond Selon les résultats admis au [II], Γ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et ne s'y annule pas donc $\forall x > 0, y \mapsto \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \beta(x, y)$ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$. En particulier, $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \frac{\partial \beta}{\partial y}(x, y)$ existe .

$$\diamond \text{ On a } \forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \frac{\partial \beta}{\partial y}(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma'(y)}{\Gamma(x+y)} - \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)\Gamma'(x+y)}{(\Gamma(x+y))^2}$$

$$= \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \left[\frac{\Gamma'(y)}{\Gamma(y)} - \frac{\Gamma'(x+y)}{\Gamma(x+y)} \right]$$

$$\text{donc } \forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \frac{\partial \beta}{\partial y}(x, y) = \beta(x, y)(\psi(y) - \psi(x+y)) .$$

III.B.2) Si $y < y', \forall t \in]0, 1[, t^x(1-t)^y > t^x(1-t)^{y'}$ donc $\beta(x, y) \geq \beta(x, y')$. Ainsi $y \mapsto \beta(x, y)$ décroît sur \mathbb{R}_+^* .

III.B.3) En conséquence, $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \frac{\partial \beta}{\partial y}(x, y) \leq 0$. De plus, $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \beta(x, y) > 0$ donc, grâce à la formule du [1], $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \psi(y) \leq \psi(x+y)$ ce qui montre que ψ est croissante sur \mathbb{R}_+^* .

III.C -

III.C.1) Pour tout $x > -1$ et $n \geq 1$, par télescopage, $\psi(x+n+1) - \psi(x+1) = \sum_{k=1}^n [\psi(x+k+1) - \psi(x+k)] = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x+k}$ d'après [A]. En particulier, pour $x = 0, \psi(n+1) - \psi(1) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ donc, en soustrayant membre à membre,

$$\psi(n+1) - \psi(1) - \psi(x+n+1) + \psi(x+1) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k} \right)$$

$$\text{soit } \forall x > -1, \forall n \geq 2, \psi(x+1) - \psi(1) = \psi(x+n+1) - \psi(n+1) + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k} \right) .$$

III.C.2) On a $0 < x+1 \leq p+1$ donc, par croissance de ψ ,

$$0 \leq \psi(x+n+1) - \psi(n) \leq \psi(p+n+1) - \psi(n) = \sum_{k=n}^{n+p} [\psi(k+1) - \psi(k)] = \sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{k}$$

et $\sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{k} = H_{n+p} - H_{n-1}$. De plus, puisque $\forall k \in \llbracket n, n+p \rrbracket, \frac{1}{k} \leq \frac{1}{n}$, on obtient

$$0 \leq \psi(x+n+1) - \psi(n) \leq H_{n+p} - H_{n-1} \leq \frac{p+1}{n} .$$

III.C.3) Pour $x > -1$, la série $\sum_{k \geq 1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k} \right)$ est convergente car $\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k} = \frac{x}{k(k+x)} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{k^2}$. De plus, $s > -1$ étant fixé donc $p = E(x) + 1$ également, on a $\frac{p+1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ donc l'inégalité du [2], donne $\psi(x+n+1) - \psi(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. En particulier, $\psi(n+1) - \psi(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Or l'égalité du [1] donne

$$\psi(x+1) = \underbrace{(\psi(x+n+1) - \psi(n))}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0} - \underbrace{(\psi(n+1) - \psi(n))}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0} + \psi(1) + \underbrace{\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k} \right)}_{\text{converge}}$$

$$\text{donc } \forall x > -1, \psi(x+1) = \psi(1) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k} \right) .$$

III.D -

III.D.1) \diamond Posons, pour $n \geq 2$, $v_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{x+n}$. On a :

- $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, v_n est de classe C^∞ sur $] -n, +\infty[$ donc sur $[-1, +\infty[$ avec $\forall k \geq 1$, $v_n^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1} k!}{(x+n)^{k+1}}$;
- $\forall x \geq -1$, $v_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{n^2}$ donc la série $(\sum v_n)_{n \geq 2}$ converge simplement sur $[-1, +\infty[$;
- Pour $k \geq 1$, $\|v_n^{(k)}\|_\infty^{[-1, +\infty[} = \frac{k!}{(n-1)^{k+1}}$ donc, puisque $k+1 > 1$, la série $(\sum v_n^{(k)})_{n \geq 2}$ converge normalement donc uniformément sur $[-1, +\infty[$.

Donc le théorème de dérivation terme à terme s'applique et g est de classe C^∞ sur $[-1, +\infty[$.

\diamond Et $\forall x \in [-1, +\infty[$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $g^{(k)}(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} v_n^{(k)}(x)$. Or $v_n^{(k)}(0) = \frac{(-1)^{k+1} k!}{n^{k+1}}$ donc $g^{(k)}(0) = (-1)^{k+1} k! \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{k+1}}$ soit $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $g^{(k)}(0) = (-1)^{k+1} k! (\zeta(k+1) - 1)$.

III.D.2) \diamond La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n en 0 s'écrit, pour $x \in [-1, +\infty[$,

$$g(x) - \sum_{k=0}^n \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n g^{(n+1)}(tx) dt$$

donc

$$\forall x \geq -1, \left| g(x) - \sum_{k=0}^n \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n |g^{(n+1)}(tx)| dt.$$

Or $\forall t \in [0, 1]$, $\forall x \geq -1$, $|g^{(n+1)}(tx)| = \left| (-1)^{n+2} (n+1)! \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{(p+tx)^{n+2}} \right| \leq (n+1)! \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{(p-1)^{n+2}}$ car, pour tout $p \geq 2$, $0 < p-1 \leq p+tx$ et, d'autre part, $\forall p \geq 2$, $\frac{1}{(p-1)^{n+2}} \leq \frac{1}{(p-1)^2}$ car $n \geq 0$. On obtient donc :

$$\forall x \geq -1, \left| g(x) - \sum_{k=0}^n \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n (n+1)! \zeta(2) dt = |x|^{n+1} \zeta(2) \left[-(1-t)^{n+1} \right]_0^1$$

$$\text{et donc } \forall x \geq -1, \left| g(x) - \sum_{k=0}^n \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq \zeta(2) |x|^{n+1}.$$

\diamond Mais, si $x \in] -1, 1[$, $\zeta(2) |x|^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc l'inégalité ci-dessus implique que

$$\forall x \in] -1, 1[, \sum_{k=0}^n \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} g(x)$$

et donc g est développable en série entière sur $] -1, 1[$.

III.D.3) Avec l'égalité vue au [C.3], on obtient

$$\begin{aligned} \forall x \in] -1, 1[, \quad \psi(x+1) &= \psi(1) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k} \right) = \psi(1) + \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) + g(x) \\ &= \psi(1) + \frac{x}{x+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n \\ &= \psi(1) + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} x^n + g(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} (\zeta(n+1) - 1) x^n \quad \text{selon [1]} \end{aligned}$$

ce qui donne bien $\forall x \in]-1, 1[$, $\psi(x+1) = \psi(1) + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \zeta(n+1) x^n$.

Remarque: Une autre démonstration de cette formule est possible à l'aide d'une famille sommable.

Partie IV

IV.A - \diamond Comme on l'a signalé au [III.B.1], pour tout $x > 0$, $y \mapsto \beta(x, y)$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R}_+^* . Notamment $\forall x > 0$, $B(x) = \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2}(x, 1)$ existe.

\diamond Reprenons l'égalité vue au [III.B.1]: $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\frac{\partial \beta}{\partial y}(x, y) = \beta(x, y)(\psi(y) - \psi(x+y))$. On en déduit :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{\partial \beta}{\partial y}(x, y)(\psi(y) - \psi(x+y)) + \beta(x, y)(\psi'(y) - \psi'(x+y)) \\ &= \beta(x, y)(\psi(y) - \psi(x+y))^2 + \beta(x, y)(\psi'(y) - \psi'(x+y)). \end{aligned}$$

Or $\beta(x, 1) = \int_0^1 t^{x-1} dt = \frac{1}{x}$ donc $\forall x > 0$, $x B(x) = (\psi(1) - \psi(x+1))^2 + (\psi'(1) - \psi'(x+1))$.

\diamond Puisque Γ est C^∞ sur \mathbb{R}_+^* et ne s'y annule pas, ψ est C^∞ sur \mathbb{R}_+^* donc B est de classe C^∞ sur \mathbb{R}_+^* .

IV.B -

IV.B.1) Soit $x > 0$ fixé. Posons $h(y, t) = t^{x-1}(1-t)^{y-1} = t^{x-1} \exp[(y-1) \ln(1-t)]$. On a :

- $\forall y \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto h(y, t)$ est continue (par morceaux) et intégrable sur $]0, 1[$ [d'après [II.B.1];
- $\forall (y, t) \in \mathbb{R}_+^* \times]0, 1[$, $\frac{\partial h}{\partial y}(y, t) = \ln(1-t)t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ et $\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(y, t) = (\ln(1-t))^2 t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ existent;
- pour tout $t \in]0, 1[$, $y \mapsto \frac{\partial h}{\partial y}(y, t)$ et $y \mapsto \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(y, t)$ sont continues sur \mathbb{R}_+^* ;
- pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial y}(y, t)$ est continue sur $]0, 1[$, $\frac{\partial h}{\partial y}(y, t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^x$ avec $x > 0$ et $\frac{\partial h}{\partial y}(y, t) \underset{t \rightarrow 1^-}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$ car $(1-t)^{y-1/2} \ln(1-t) \xrightarrow{t \rightarrow 1^-} 0$ donc $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial y}(y, t)$ est intégrable sur $]0, 1[$;
- pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(y, t)$ est continue (par morceaux) sur $]0, 1[$;
- soit c tel que $0 < c < 1$, on a la domination pour $y \in [c, +\infty[$:

$$\forall t \in]0, 1[, \quad \left| \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(y, t) \right| = (\ln(1-t))^2 t^{x-1}(1-t)^{y-1} \leq (\ln(1-t))^2 t^{x-1}(1-t)^{c-1} = H(t)$$

avec H continue sur $]0, 1[$, $H(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{x+1}$, $H(t) \underset{t \rightarrow 1^-}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$ donc H intégrable sur $]0, 1[$.

Ainsi le théorème de dérivation des intégrales à paramètre s'applique et $y \mapsto \beta(x, y)$ est de classe C^2 sur $[c, +\infty[$ et sa dérivée seconde est donnée par dérivation sous l'intégrale. Ceci donne, en $y = 1$,

$$\forall x > 0, \quad B(x) = \int_0^1 (\ln(1-t))^2 t^{x-1} dt.$$

IV.B.2) De la même façon, on obtiendrait $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall x > 0$, $B^{(p)}(x) = \int_0^1 (\ln(1-t))^2 (\ln(t))^p t^{x-1} dt$.

IV.B.3) Selon [I.F.2], $\forall r \geq 2$, $S_r = \frac{(-1)^r}{2(r-2)!} \int_0^1 \frac{(\ln(1-t))^2 (\ln t)^{r-2}}{t} dt$. Mais, on a $\forall r \geq 2$, $\forall x > 0$, $B^{(r-2)}(x) = \int_0^1 (\ln(1-t))^2 (\ln t)^{r-2} t^{x-1} dt$ et

- $\forall t \in]0, 1[$, $(\ln(1-t))^2 (\ln t)^{r-2} t^{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln(1-t))^2 (\ln t)^{r-2}}{t}$;
- $t \mapsto \frac{(\ln(1-t))^2 (\ln t)^{r-2}}{t}$ est continue (par morceaux) sur $]0, 1[$;
- on a la domination $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall t \in]0, 1[$, $\left| (\ln(1-t))^2 (\ln t)^{r-2} t^{x-1} \right| \leq \frac{(\ln(1-t))^2 |\ln t|^{r-2}}{t}$ et cette fonction dominante est intégrable sur $]0, 1[$ d'après [I.F.2]

En appliquant le théorème de convergence dominée pour $x \rightarrow 0^+$, on obtient

$$B^{(r-2)}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{(\ln(1-t))^2 (\ln t)^{r-2}}{t} dt$$

$$\text{et donc } S_r = \frac{(-1)^r}{2(r-2)!} \lim_{x \rightarrow 0^+} B^{(r-2)}(x).$$

IV.B.4) Notamment, $S_2 = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} B(x)$ et la formule du [A] jointe au développement trouvé au [III.3] donne

$$\begin{aligned} B(x) &= \frac{1}{x} \left[(\psi(1) - \psi(x+1))^2 + (\psi'(1) - \psi'(x+1)) \right] \\ &\underset{x \rightarrow 0^+}{=} \frac{1}{x} \left[(\psi(1) - \psi(1) - \zeta(2)x + o(x))^2 + (\zeta(2) - \zeta(2) + 2\zeta(3)x + o(x)) \right] \\ &\underset{x \rightarrow 0^+}{=} 2\zeta(3) + o(1) \end{aligned}$$

ce qui redonne bien $S_2 = \zeta(3)$.

IV.C -

IV.C.1) $\diamond \psi$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R}_+^* donc φ est de classe C^∞ sur $] -1, +\infty[$.

\diamond La formule de Leibniz donne, pour tout $x \in] -1, +\infty [$ et tout $n \geq 2$,

$$\varphi^{(n)}(x) = (\psi(x+1) - \psi(1)) \psi^{(n)}(x+1) + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \psi^{(k)}(x+1) \psi^{(n-k)}(x+1) + \psi^{(n)}(x+1) (\psi(x+1) - \psi(1)) - \psi^{(n+1)}(x+1)$$

$$\text{donc } \forall n \geq 2, \varphi^{(n)}(0) = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \psi^{(k)}(1) \psi^{(n-k)}(1) - \psi^{(n+1)}(1).$$

IV.C.2) Selon [A], B est C^∞ sur $]0, +\infty[$ et, selon [B.3], $\forall p \in \mathbb{N}$, $B^{(p)}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 2(-1)^p p! S_{p+2}$. Le théorème de prolongement C^∞ donne que B se prolonge en une fonction $\tilde{B} C^\infty$ sur $[0, +\infty[$ et telle que $\forall p \in \mathbb{N}$, $\tilde{B}^{(p)}(0) = 2(-1)^p p! S_{p+2}$. \tilde{B} admet donc un développement limité à l'ordre $r-2$ en 0 donné par la formule de Taylor-Young:

$$\tilde{B}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{p=0}^{r-2} 2(-1)^p S_{p+2} x^p + o(x^{r-2}).$$

Mais $\forall x > 0$, $\tilde{B}(x) = B(x) = \frac{\varphi(x)}{x} \underset{x \rightarrow 0^+}{=} \frac{1}{x} \left[\sum_{q=0}^{r-1} \frac{\varphi^{(q)}(0)}{q!} x^q + o(x^{r-1}) \right] = \sum_{p=0}^{r-2} \frac{\varphi^{(p+1)}(0)}{(p+1)!} x^p + o(x^{r-2})$ car $\varphi(0) = 0$. Par unicité du développement limité, on a donc $\forall p \in \llbracket 0, r-2 \rrbracket$, $2(-1)^p S_{p+2} = \frac{\varphi^{(p+1)}(0)}{(p+1)!}$. En particulier, $\forall r \geq 2$, $2S_r = (-1)^r \frac{\varphi^{(r-1)}(0)}{(r-1)!}$. Et, pour $r \geq 3$, la formule du [1] donne

$$2S_r = \frac{(-1)^r}{(r-1)!} \left[\sum_{k=1}^{r-2} \binom{r-1}{k} \psi^{(k)}(1) \psi^{(r-1-k)}(1) - \psi^{(r)}(1) \right].$$

D'autre part, le développement en série entière trouvé au [III.D.3] donne $\psi^{(n)}(1) = (-1)^{n+1} n! \zeta(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a donc

$$\begin{aligned} 2S_r &= \frac{(-1)^r}{(r-1)!} \left[\sum_{k=1}^{r-2} \binom{r-1}{k} (-1)^{k+1} k! \zeta(k+1) (-1)^{r-k} (r-1-k)! \zeta(r-k) - (-1)^{r+1} r! \zeta(r+1) \right] \\ &= \frac{(-1)^r}{(r-1)!} \left[\sum_{k=1}^{r-2} \frac{(r-1)!}{k!(r-1-k)!} (-1)^{r+1} k! (r-1-k)! \zeta(k+1) \zeta(r-k) - (-1)^{r+1} r! \zeta(r+1) \right] \end{aligned}$$

$$\text{soit } \underline{2S_r = r\zeta(r+1) - \sum_{k=1}^{r-2} \zeta(k+1)\zeta(r-k)}.$$

* * *
* *
*