Corrigé de Mines MP Maths 2 - 2013

Remarque préliminaire : a) Si A est symétrique positive, soit $(e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres, avec les valeurs propres $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. Pour X quelconque, soit $X = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, on a ${}^tXAX = \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \geqslant 0$.
b) Réciproquement, si cette propriété a lieu, pour λ valeur propre associée au vecteur propre e, on a $0 \leqslant {}^teAe = \lambda ||e||^2$, et donc les valeurs propres de A sont positives ou nulles. (Cours).

1. Pour toute base, $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n e_i^*(Ae_i)$; si la base est orthonormée, cela revient à $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n < Ae_i, e_i >$. (Cours).
2. Cours de base.
3. Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres pour B : on écrit $Be_i = \lambda_i e_i$ (avec donc des $\lambda_i \geqslant 0$).
Alors $\operatorname{tr}({}^tAB) = \sum_{i=1}^n < {}^tABe_i, e_i > = \sum_{i=1}^n \lambda_i < {}^tAe_i, e_i >$
$= \sum_{i=1}^n \lambda_i \, {}^te_i A e_i$.
Comme on a, pour tout i, $\lambda_i \geqslant 0$ et ${}^te_iAe_i \geqslant 0$, on conclut comme désiré.
4. Déjà, ${}^t({}^tAA) = {}^tAA$. Puis, pour tout X, ${}^tX\,{}^tAAX = ||AX||^2 \geqslant 0$, donc ${}^tAA$ est symétrique positive.
Soient $\lambda_1 \leqslant ... \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de ${}^tAA$. Pour X quelconque, soit $X = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ (base orthonormée associée), on a $||AX||^2 = {}^tX\,{}^tAAX = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \leqslant \lambda_n ||X||^2$, donc $||A||_2 \leqslant \sqrt{\lambda_n}$. Mais on obtient un cas d'égalité : $||Ae_n||^2 = \lambda_n$, et $||e_n|| = 1$. Finalement, $||A||_2^2$ est la plus grande valeur propre (le rayon spectral, ici) de ${}^tAA$. (Cours, encore).
5. Par le théorème spectral, on écrit ${}^tAA = PDP^{-1}$, où ${}^tAA$ est bien la matrice dans la base choisie de $f^* \circ f$, et où $P \in O_n(\mathbb{R})$, D diagonale, ses éléments étant positifs. On peut alors choisir une matrice diagonale à éléments positifs, soit Δ, telle que $\Delta^2 = D$. Il vient ${}^tAA = R^2$, où $R = P\Delta P^{-1}$. C'est là une matrice facilement symétrique positive. Si c'est la matrice d'un endomorphisme h dans la base orthonormée, on a à la fois h symétrique positif et $f^* \circ f = h^2$.
6. En général (cours), $\operatorname{Ker} u^* = (\operatorname{Im} u)^\perp$. Ici, $\operatorname{Ker} h = \operatorname{Ker} h^* = (\operatorname{Im} h)^\perp$. Ainsi, $\operatorname{Im} h$ est un supplémentaire du noyau de h. Par le théorème Noyau-Image, h induit un isomorphisme de $\operatorname{Im} h$ sur $h(\operatorname{Im}(h))$, qui est inclus dans $\operatorname{Im} h$. Pour de raison de dimensions, $h(\operatorname{Im} h) = \operatorname{Im} h$.
7. On calcule $||f(x)||^2 = < f(x), f(x) > = < f^*(f(x)), x > = < h(h(x)), x >$
$= < h(x), h(x) > = ||h(x)||^2$. Alors, $\dim \operatorname{Ker} h = \dim \operatorname{Ker} f = n - \dim \operatorname{Im} f = \dim(\operatorname{Im} f)^\perp$. Soit s la dimension commune à ces deux espaces. On choisit une base orthonormée dans chacun d'eux. L'application v qui envoie la base choisie de $\operatorname{Ker} h$ sur celle de $(\operatorname{Im} f)^\perp$ est un isomorphisme qui conserve la norme.
8. On peut définir u, application linéaire de E vers E, par recollement de $w = f_{|\operatorname{Im} h} \circ (\tilde{h})^{-1} : \operatorname{Im} h \to \operatorname{Im} f$ et $v : \operatorname{Ker} h \to (\operatorname{Im} f)^\perp$. On a deux

supplémentaires orthogonaux au départ, et deux supplémentaires orthogonaux à l'arrivée. On a vu que v conserve la norme. C'est aussi le cas de w : pour $x \in \operatorname{Im} h$, $||w(x)|| = ||f\big((\tilde{h})^{-1}(x)\big)|| = ||h\big((\tilde{h})^{-1}(x)\big)|| = ||\tilde{h}\big((\tilde{h})^{-1}(x)\big)|| = ||x||$. En vertu du théorème de Pythagore, u conserve également la norme.
Enfin, pour $x \in \operatorname{Ker} h, f(x) = 0 = u(h(x))$. Pour $x \in \operatorname{Im} h, u(h(x)) = u(\tilde{h}(x)) = f\big((\tilde{h})^{-1}(\tilde{h}(x))\big) = f(x)$.

9. Si on se donne A, on choisit la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et f canoniquement associé à A, on se retrouve dans les conditions de cette partie. En prenant U de matrice u et S de matrice h dans la base canonique, la relation $f = u \circ h$ devient $A = US$, et $U \in O_n(\mathbb{R})$, S est symétrique positive.

10. L'application $g : H \to \mathbb{R}_+, h \mapsto ||x - h||$ est continue par les théorèmes généraux, et atteint donc sa borne inférieure sur le compact H : il existe $h_0 \in H$ tel que $\forall h \in H, ||x - h|| \geqslant ||x - h_0||$. Alors, $d(x, H) = ||x - h_0||$. Supposons que le minimum soit également atteint en h_1. La fonction q : $t \mapsto ||x - th_0 - (1 - t)h_1||^2$ est un trinôme en t, soit $q(t) = at^2 + 2bt + c$ avec $a = ||h_1 - h_0||^2$, $b =< x - h_1, h_1 - h_0 >$, $c = ||x - h_1||^2$. Si $h_1 \neq h_0$, c'est un vrai trinôme en t, de coefficient dominant strictement positif, et $q(0) = q(1)(= d^2(x, H))$. Mais alors, pour tout $t \in]0, 1[$, on a $q(t) < q(0) = q(1)$, ce qui est absurde, car $q(t) = ||x - k||^2$ où $k = th_0 + (1 - t)h_1$ est un élément de H par convexité. Ainsi, h_0 est bien l'unique point où le minimum est atteint.

11. Prenons h_1 quelconque dans H. On a encore
$q(t) = ||x - h_0||^2 - 2(1 - t) < x - h_0, h_1 - h_0 > +(1 - t)^2 ||h_0 - h_1||^2$. Ceci est minoré par $||x - h_0||^2$. Donc pour tout $t \in [0, 1[$,
$-2(1 - t) < x - h_0, h_1 - h_0 > +(1 - t)^2 ||h_0 - h_1||^2 \geqslant 0$. On en tire pour les mêmes t : $-2 < x - h_0, h_1 - h_0 > +(1 - t)||h_0 - h_1||^2 \geqslant 0$. En faisant tendre t vers 1, il vient $-2 < x - h_0, h_1 - h_0 > \geqslant 0$.
Réciproquement, si cette condition a lieu, on minore, pour tout h_1, $q(0)$ par $||x - h_0||^2$, ce qui montre que $||x - h_1||^2 \geqslant ||x - h_0||^2$, donc h_0 est bien un point où le minimum est atteint, que l'on sait déjà unique.

12. On peut supposer H non vide, et on note X l'ensemble des combinaisons convexes d'éléments de H. Alors X contient H (on écrit $x = 1.x...$). Puis, X est convexe : si $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i, y = \sum_{j=1}^{q} \mu_j y_j$ sont deux éléments de X, si $\lambda, \mu \geqslant 0$, avec $\lambda + \mu = 1$, il vient $\lambda x + \mu y = \sum_{i=1}^{p} \lambda\lambda_i x_i + \sum_{j=1}^{q} \mu\mu_j y_j$, et $\sum_{i=1}^{p} \lambda\lambda_i + \sum_{j=1}^{q} \mu\mu_j = 1$, tous les coefficients étant positifs.
Enfin, si un convexe C contient H, il contient par récurrence toutes les combinaisons convexes d'éléments de H, c'est-à-dire contient X. On a montré ainsi que X est le plus petit convexe contenant H.

13. La famille $(x_2 - x_1, ..., x_p - x_1)$, constituée d'au moins $n + 1$ vecteurs de E, est liée : on trouve donc $\mu_2, ..., \mu_p$ non tous nuls, tels que $\mu_2(x_2 - x_1) + ... + \mu_p(x_p - x_1) = 0$, puis on pose $\mu_1 = -(\mu_2 + ... + \mu_p)$, on a toujours des μ_j non tous nuls, et les deux relations voulues.

14. Notons J l'ensemble nécessairement non vide des i tels que $\mu_i > 0$. Soit

$\theta = \min\{\dfrac{\lambda_i}{\mu_i}, i \in J\}$. Alors $\theta \geqslant 0$. Pour un i quelconque, si $\mu_i \geqslant 0$, on a $\lambda_i - \theta\mu_i \geqslant 0$; si $\mu_i > 0$, par choix de θ, on a encore $\lambda_i - \theta\mu_i \geqslant 0$. Enfin, il y a un indice $k \in J$ qui donne le minimum, si bien que $\lambda_k - \theta\mu_k = 0$.
Alors, $x = x - \theta 0 = \sum_{i=1}^{p}(\lambda_i - \theta\mu_i)x_i$, c'est bien là une combinaison convexe d'au plus $p-1$ éléments de H.
Si $x \in \mathrm{conv}(H)$, soit alors $\ell = \min\{p \geqslant n+1, x$ s'écrit comme combinaison convexe de p éléments de $H\}$. Il existe par hypothèse et parce que $\mathbb{N}$ est bien ordonné, et on vient de voir que ℓ n'est pas au moins égal à $n+2$. C'est donc que $\ell = n+1$.

15. Considérons
$f : H^{n+1} \times \Lambda \to E, \big((x_1, ..., x_{n+1}), (t_1, ..., t_{n+1})\big) \mapsto t_1x_1 + ... + t_{n+1}x_{n+1}$.
Cette application est bien définie, et continue par les théorèmes généraux. Son ensemble de départ est compact (car un produit de compacts l'est), et son image est $\mathrm{conv}(H)$, on vient de le voir : cette image est bien compacte.
Remarque : Λ est en effet naturellement fermé, car défini par des conditions continues et fermées, et borné : pour tout $t \in \Lambda$, on a pour tout i, $0 \leqslant t_i \leqslant 1$.

16. Il est notoire que $O_n(\mathbb{R})$ est compact (c'est un fermé borné de l'espace vectoriel de dimension finie $M_n(\mathbb{R})$). D'après la question 15, son enveloppe convexe est compacte.

17. Si $A \in O_n(\mathbb{R})$, on a pour tout X de norme 1 : $||AX|| = ||X|| = 1$. Donc $||A||_2 \leqslant 1$. C'est dire que $O_n(\mathbb{R})$ est contenu dans la boule $\mathcal{B}$. Or, il est bien connu qu'une boule est convexe. Cette boule $\mathcal{B}$ contient alors par définition le plus petit convexe qui contient $O_n(\mathbb{R})$, donc $\mathrm{conv}(O_n(\mathbb{R}))$.

18. D'après la caractérisation vue à la question 11, $< M-N, V-N > \leqslant 0$, soit $< M-N, V > \leqslant < M-N, N >$ ou encore $\mathrm{tr}(AV) \leqslant \mathrm{tr}(AN)$. D'autre part, $M \neq N$, donc $< M-N, M-N > > 0$, donc $< M-N, N > < < M-N, M >$, ou encore $\mathrm{tr}(AN) < \mathrm{tr}(AM)$.
Ainsi, pour tout $V \in \mathrm{conv}(O_n(\mathbb{R}))$, $\mathrm{tr}(USV) < \mathrm{tr}(USM)$. On peut choisir $V = U^{-1}$, d'où $\mathrm{tr}(S) = \mathrm{tr}(VUS) = \mathrm{tr}(USV) < \mathrm{tr}(USM)$.

19. On choisit une base orthonormée de vecteurs propres pour S : pour tout i, $Se_i = \lambda_i e_i$. Alors, $\mathrm{tr}(S) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i$.
Par ailleurs, $\mathrm{tr}(MUS) = \sum_{i=1}^{n} < MUSe_i, e_i > = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i < MUe_i, e_i > \leqslant \sum_{i=1}^{n}\lambda_i ||MUe_i|| ||e_i|| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\lambda_i$ (on a utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la positivité des λ_i, le fait que $||Ue_i|| = ||e_i|| = 1$, et le fait que pour tout X par hypothèse, $||MX|| \leqslant ||X||$). C'est bien l'inégalité $\mathrm{tr}(MUS) \leqslant \mathrm{tr}(S)$.

20. Comme $\mathrm{tr}(USM) = \mathrm{tr}(MUS)$, on est parvenu à une contradiction. C'est donc qu'il n'existe pas de M comme supposé, et enfin que $\mathrm{conv}(O_n(\mathbb{R})) = \mathcal{B}$.

21. Soit X quelconque non nul. On a $||X|| = ||UX|| = ||\frac{1}{2}VX + \frac{1}{2}WX|| \leqslant \frac{1}{2}||VX|| + \frac{1}{2}|| WX|| \leqslant \frac{1}{2}||X|| + \frac{1}{2}||X|| = ||X||$ (puisque V, W sont dans $\mathcal{B}$; de son côté, U conserve la norme).
On a donc là un cas d'égalité dans l'inégalité de Minkowski, qui entraîne

en particulier que VX et WX sont liés. Soit D une droite qui contient UX et VX. On a $UX = \frac{1}{2}VX + \frac{1}{2}WX \in D$; comme $UX \neq 0$, UX dirige D. Il existe alors un α tel que $VX = \alpha UX$, puis $U^{-1}VX = \alpha X$. Nous sommes arrivés à la situation classique où pour tout X (non nul...), ZX et X sont liés, avec $Z = U^{-1}V$. Donc Z est scalaire. On procède de même pour W et ainsi $V = \alpha U, W = \beta U$. Mais alors $||V||_2 = |\alpha|||U||_2 = |\alpha| \leqslant 1$, de même $|\beta| \leqslant 1$. Enfin, $2U = (\alpha + \beta)U$, donc $\alpha + \beta = 2$. On a alors $\alpha = \beta = 1$, donc $U = V = W$ comme désiré.

22. Ecrivons d'après la question 9, $A = US$. Le théorème spectral donne $S = RDR^{-1}$ avec $R \in O_n(\mathbb{R})$ et D à éléments diagonaux positifs ou nuls. Il vient $A = (UR)D(R^{-1})$, de la forme $A = PDQ$, où $P = UR$ est bien orthogonale, ainsi que $Q = R^{-1}$.

23. On a $||AX||^2 = {}^t(AX)AX = {}^tX\,{}^tQ\,{}^tD\,{}^tPPDQX = {}^t(QX)D^2QX$, qu'on sait inférieur pour tout X à $||X||^2 = ||QX||^2$. En prenant $QX = e_i$, il vient $d_i^2 \leqslant 1$. Mais si tous les d_i valaient 1, on aurait $D = I_n$ et $A = PQ$ serait orthogonale, ce qu'on a exclu.

24. Si une matrice diagonale G est telle que toutes ses valeurs propres sont comprises entre -1 et 1, alors la matrice PGQ est dans $\mathcal{B}$. En effet pour tout X, $||GX||^2 = \sum_{i=1}^n g_i^2 x_i^2 \leqslant ||X||^2$. Puis $||PGQX|| = ||GQX|| \leqslant ||QX|| = ||X||$.
Considérons $\beta = 1 - d_j > 0$ par hypothèse. Choisissons un $\alpha \neq 0$ tel que $-\beta \leqslant \alpha \leqslant \beta$. Posons D_α diagonale, d'éléments diagonaux d_i, sauf d_j remplacé par $d_j + \alpha$, et de même pour $D_{-\alpha}$, où d_j est remplacé par $d_j - \alpha$. Les conditions sur α assurent que $\alpha + d_j \leqslant 1, -\alpha + d_j \leqslant 1, \alpha + d_j \geqslant -1, -\alpha + d_j \geqslant -1$. D'après notre préambule, les deux matrices $A_\alpha = PD_\alpha Q$ et $A_{-\alpha} = PD_{-\alpha}Q$ sont donc dans $\mathcal{B}$. Enfin, la relation $D_\alpha + D_{-\alpha} = 2D$ mène à $A_\alpha + A_{-\alpha} = 2A$ et l'on a $A_\alpha \neq A$. On a montré que A n'est pas extrémale.