E3A, 2008, MP, Mathématiques A

Questions de cours et exemples

1. Un polynôme annulateur de f est un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

2. J_f est un idéal de $\mathbb{R}[X]$, donc monogène, c'est dire qu'il existe un polynôme P_0 tel que $J_f = (P_0) = \{$ multiples de $P_0\}$.
C'est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$).

3. **Si** $J_f \neq \{0\}$, le polynôme P_0 de la question précédente est non nul, donc on peut le supposer unitaire. Dans ce cas, le polynôme minimal de f est l'unique polynôme unitaire π_f tel que $J_f = (\pi_f) = \pi_f.\mathbb{R}[X]$.
C'est aussi le polynôme unitaire appartenant à J_f de plus petit degré.

4. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $J_f \neq \{0\}$ puisque le polynôme caractéristique de f, χ_f appartient à J_f.
On peut aussi remarquer que si $dim(E) = n$, la famille de vecteurs $(Id, f, \ldots f^{n^2})$ est une famille de $n^2 + 1$ vecteurs, donc liée dans $\mathcal{L}\ (E)$ qui est de dimension n^2. Donc il existe des coefficients $a_0, \ldots a_{n^2}$ **non tous nuls** tels que $\sum a_k f^k = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}$, c'est à dire un polynôme annulateur non nul de f.

D'après ce qui précède, f admet donc un polynôme minimal.

5. 1. On a $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ donc $M^2 = M$ et donc, par récurrence, $\underline{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ M^k = M}$.

2. Ainsi $X^2 - X \in J_f$ donc $\pi_f \mid X^2 - X = X(X-1)$ et donc $\pi_f \in \big\{X, X-1, X^2 - X\big\}$ (1 n'est pas annulateur si $E \neq \{0\}$). Or $M \neq 0$ et $M \neq I_4$ donc $\underline{\pi_f = X^2 - X}$.

6. 1. $\diamond$ L'équation homogène $y'' + y = 0$ est à coefficients constants et a pour équation caractéristique $X^2 + 1 = 0$ donc les solutions sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ de $y'' + y = 0$ sont les fonctions $x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x)$ pour $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
Comme $\mathrm{ch}'' = \mathrm{ch}$, une solution particulière de $y'' + y = \mathrm{ch}\,(x)$ est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2}\mathrm{ch}\,(x)$ donc <u>les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y'' + y = \mathrm{ch}\,(x)$ sont les $y :\ x \mapsto \dfrac{1}{2}\mathrm{ch}\,(x) + A\cos(x) + B\sin(x)$ pour $(A, B) \in \mathbb{R}^2$</u> .

$\diamond$ De même, <u>les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y'' + y = \mathrm{sh}\,(x)$ sont les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{2}\mathrm{sh}\,(x) + A\cos(x) + B\sin(x)$ pour $(A, B) \in \mathbb{R}^2$</u> .

2. Puisque f est supposée de classe C^4 sur $\mathbb{R}$ alors g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et donc :

$$\begin{aligned}
\Big(f \text{ solution de } (H_1)\Big) &\iff \Big(\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(4)}(x) = f(x)\Big) \\
&\iff \Big(\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(4)}(x) + f''(x) = f(x) + f''(x)\Big) \\
&\iff \Big(\forall x \in \mathbb{R},\ g''(x) = g(x)\Big)
\end{aligned}$$

donc $\underline{\Big(f \text{ solution de } (H_1)\Big) \Longleftrightarrow \Big(g = f'' + f \text{ solution de } y'' = y\Big)}$.

3. (H_2) : $y'' - y = 0$ est linéaire, homogène, à coefficients constants et a pour équation caractéristique $X^2 - 1 = 0$ donc a pour solutions les fonctions $x \mapsto A\,e^x + B\,e^{-x}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$, ou aussi, $\underline{\text{les solutions de } (H_2) \text{ sont les } y :\ x \mapsto A\,\text{ch}\,(x) + B\,\text{sh}\,(x) \text{ pour } (A, B) \in \mathbb{R}^2}$.

4. D'après les résultats de la question [**6.2**] : f est solution de (H_1) ssi $g'' + g = 0$ ssi $\exists(\lambda, \mu), \forall x \in \mathbb{R}, f"(x) + f(x) = \lambda\text{ch}(x) + \mu\text{sh}(x)$.
D'après les résultats de la question [**6.1**] et le principe de superposition, une solution particulire de $f''(x) + f(x) = \lambda\text{ch}(x) + \mu\text{sh}(x)$ est de la forme $x \mapsto \dfrac{1}{2}(\lambda\text{ch}(x) + \mu\text{sh}(x))$
Finalement, une solution de (H_1) est de la forme $y :\ x \mapsto A\,\cos(x) + B\,\sin(x) + \lambda/2\,\text{ch}\,(x) + \mu/2\,\text{sh}\,(x)$ et en renommant les variables λ et μ, on obtient que :
$\underline{\text{les solutions de } (H_1) \text{ sont les } y :\ x \mapsto A\,\cos(x) + B\,\sin(x) + C\,\text{ch}\,(x) + D\,\text{sh}\,(x) \text{ avec } (A, B, C, D) \in \mathbb{R}^4}$.

5. 1. Par définition de E, la famille $\big(\cos, \sin, \text{ch}, \text{sh}\big)$ en est génératrice. De plus, si $A\,\cos + B\,\sin + C\,\text{ch} + D\,\text{sh} = 0$ alors, en dérivant deux fois, $-A\,\cos - B\,\sin + C\,\text{ch} + D\,\text{sh} = 0$ donc $A\,\cos + B\,\sin = 0$ et $C\,\text{ch} + D\,\text{sh} = 0$. En prenant les valeurs en 0 (par exemple), on obtient $A = B = C = D = 0$ donc cette famille est libre et c'est donc une base de E. Ainsi $\underline{\dim(E) = 4}$.

On pouvait aussi étudier la limite de $A\,\cos + B\,\sin + C\,\text{ch} + D\,\text{sh}$ en $+\infty$ et $-\infty$. L' étude par un équivalent est possible, mais un peu plus périlleuse..

2. La dérivation est linéaire et $\big(A\,\cos + B\,\sin + C\,\text{ch} + D\,\text{sh}\big)' = -A\,\sin + B\,\cos + C\,\text{sh} + D\,\text{ch} \in E$ donc E est stable. Donc <u>la dérivation induit bien un endomorphisme de E</u> .

3. D'après [**6.4**], E est l'ensemble des solutions de (H_1) donc $\forall y \in E,\ y^{(4)} = \delta^4(y) = y$. Ainsi $X^4 - 1 \in J_\delta$ et $\pi_\delta \mid X^4 - 1$,
donc $\pi_\delta \in \{X - 1, X + 1, X^2 + 1, (X^2 + 1)(X - 1), (X^2 + 1)(X + 1), (X^2 + 1)(X^2 - 1)\}$
Soit $M = Mat_\beta(f)$ où $\beta = (\cos, \sin, \text{ch}, \text{sh})$. Alors $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ diagonale par blocs.
On vérifie que $(M^2 + I) \neq 0$, $M + I \neq 0$, $M - I \neq 0$, $(M^2 + I)(M + I)$ et $(M^2 + I)(M - I) \neq 0$.
Alors $\underline{\pi_f = \chi_f}$.

On peut aussi raisonner de la manière suivante :
Si $\pi_\delta \neq X^4 - 1$ alors $\deg(\pi_\delta) \leqslant 3$ donc $\pi_\delta = \sum\limits_{i=0}^{3} a_i X^i$. On alors

$$\begin{aligned}
\forall (A, B, C, D) \in \mathbb{R}^4, \quad 0 &= \pi_\delta(\delta)\big[A\,\cos + B\,\sin + C\,\text{ch} + D\,\text{sh}\big] \\
&= \sum_{i=0}^{3} a_i\,\big[A\,\cos + B\,\sin + C\,\text{ch} + D\,\text{sh}\big]^{(i)} \\
&= \big((a_0 - a_2)A + (a_3 - a_1)B\big)\,\cos + \big((a_0 - a_2)B + (a_1 - a_3)A\big)\,\sin \\
&\qquad + \big((a_0 + a_2)C + (a_1 + a_3)D\big)\,\text{ch} + \big((a_0 + a_2)D + (a_1 + a_3)C\big)\,\text{sh}
\end{aligned}$$

donc, par liberté de $\big(\cos, \sin, \text{ch}, \text{sh}\big)$,

$$\forall (A, B, C, D) \in \mathbb{R}^4, \qquad \begin{cases} (a_0 - a_2)A + (a_3 - a_1)B = 0 \\ (a_0 - a_2)B + (a_1 - a_3)A = 0 \\ (a_0 + a_2)C + (a_1 + a_3)D = 0 \\ (a_0 + a_2)D + (a_1 + a_3)C = 0 \end{cases}$$

soit $a_0 = a_2 = -a_0$ et $a_1 = a_3 = -a_1$ donc $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$ ce qui est absurde. Donc $\underline{\pi_\delta = X^4 - 1}$.