INTERROGATION : 10 MIN

I — 5 septembre 2016

1) Groupes
Parmi les couples suivants, identifier ceux qui sont des groupes :
$(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R}+^*, \times)$, $(\mathbb{R}^*_-, \times)$, $(\mathbb{C}, \times)$, $(\mathbb{U}_n, +)$, $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$, $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \times)$, $(GL_n(\mathbb{R}), +)$, $GL_n(\mathbb{R}), \cdot)$.

2) Morphismes de groupes
On rappelle que $det(AB) = det(A)det(B)$ et que $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$.

1. Recopier et compléter les points de suspension de sorte que les applications suivantes soient des morphismes de groupes :
$det : (\ldots, \ldots) \to (\ldots, \ldots)$.
$tr : (\ldots, \ldots) \to (\ldots, \ldots)$.
$\exp : (\mathbb{C}, \ldots) \to (\ldots, \ldots)$

2. **En déduire** que les ensembles suivants sont des groupes pour la loi donnée :
$SL_n(\mathbb{C}) = \{M \in M_n(\mathbb{C}) | det(M) = 1\}$ pour la loi de multiplication des matrices
$2i\pi\mathbb{Z} = \{2i\pi k \in \mathbb{C} | k \in \mathbb{Z}\}$ pour la loi d'addition des complexes

3) Propriétés
Soient G un groupe de neutre e et G' un groupe de neutre e'.

1. Montrer que si f est un morphisme de groupes de G dans G', alors :
- **a.** $f(e) = e'$
- **b.** $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$
- **c.** pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(a^n) = f(a)^n$.

2. Montrer que si f et g sont deux morphismes de groupes respectivement de G_1 dans G_2 et de G_2 dans G_3, alors $g \circ f$ est un morphisme de groupes de G_1 dans G_3.

3. Montrer que si f est un morphisme de groupes, alors f^{-1} est un morphisme de groupes.

INTERROGATION : 5 MIN

II — 6 septembre 2016

1) Sous groupes de $\mathbb{Z}$
Décrire les sous groupes de $\mathbb{Z}$ (énoncé et démonstration)
+ une question ratée de la veille.

INTERROGATION : 5 MIN

III — 12 septembre 2016

1) Ordre d'un élément
Rappeler la définition de l'ordre d'un élément d'un groupe multiplicatif $(G, \cdot)$.

2) Sous groupes de $(\mathbb{R}, +)$
Soit G un sous groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$.

1. Justifier rigoureusement l'existence du réel $x_0 = inf(G \cap \mathbb{R}_+^*)$

2. On suppose que $x_0 = 0$. Montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$ (on rappellera la définition d'une partie dense dans $\mathbb{R}$).

\+ une question ratée de la veille.

INTERROGATION : 10 MIN

IV — 21 septembre 2016

1) Définitions

1. Définir un PGCD de deux polynômes P et Q.

2. Un polynôme P est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ si et seulement si ...
Donner un exemple d'un polynôme P_1 irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ mais pas dans $\mathbb{C}[X]$ puis d'un polynôme P_2 irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ mais pas dans $\mathbb{R}[X]$.

2) Démonstration

Énoncer puis démontrer le résultat sur les idéaux de $\mathbb{K}[X]$.

INTERROGATION : 10 MIN

V — 4 octobre 2016

1) Définitions - Formules

1. Rappeler la définition d'une valeur propre, d'un vecteur propre et d'un sous espace propre d'une matrice carrée M ou d'un endomorphisme f
2. Rappeler les formules de changements de bases

2) Démonstration

Énoncer puis démontrer le résultat sur la somme de sous-espaces propres associés à deux valeurs propres distinctes.

INTERROGATION : 10 MIN

VI — 6 octobre 2016

1) Définitions - Formules

1. Rappeler les conditions d'existence et dans ce cas la définition du polynôme minimal d'un endomorphisme.

2. Si P est un polynôme annulateur de f, que peut-on dire concernant le spectre de f ?

2) Démonstration

1. Montrer que si μ_f existe, et $d = deg(\mu_f)$, alors $(id, f, f^2, \dots f^{d-1})$ est une base de $\mathbb{K}[f]$.

2. Montrer que si λ est une valeur propre de f, alors $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(f)$.

INTERROGATION : 10 MIN

VII — 7 octobre 2016

1) Définitions - Formules

1. Faites une liste de conditions nécessaires et suffisantes (géométriques et/ou algébriques) pour que f soit diagonalisable.

2. Donner une condition suffisante mais non nécessaire pour que f soit diagonalisable.

2) Démonstration

1. Énoncer puis démontrer le lemme des noyaux (dans la démonstration, on pourra se limiter au cas de deux polynômes).