DM1

Exercice On note $A = \left\{n + m\sqrt{2}, (n,m) \in \mathbb{Z}^2\right\}$. On rappelle que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

1. Supposons $x = n + m\sqrt{2} = n' + m'\sqrt{2}$ avec n, n', m, m' entiers relatifs. on a donc $n - n' = \sqrt{2}(m' - m)$.
   Si $m \neq m'$ on peut écrire $\sqrt{2} = \frac{n-n'}{m'-m}$ ce qui n'est pas possible puisque $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Donc $m = m'$ et par suite $n = n'$.
   On sait que $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un anneau et $A \subset \mathbb{R}$.
   $+$ et $\times$ sont **deux lois de composition internes** sur A puisque $(n+m\sqrt{2})+(n'+m'\sqrt{2}) = (n+n')+\sqrt{2}(m+m')$ et $(n + m\sqrt{2}) \times (n' + m'\sqrt{2}) = nn' + 2mm' + \sqrt{2}(nm' + mn') \in A$.
   Elles sont toutes les **associatives** , et **commutatives (pourquoi le redémonter !!!!) .**
   $\times$ est **distributive** sur $+$.(pourquoi le redémonter !!!!)
   L'élément neutre pour $+$ est $0 = 0 + \sqrt{2}.0$ donc $\boxed{0 \in A}$. Tout élément de A est **inversible pour** $+$ puisque $-(n + m\sqrt{2}) = -n - m\sqrt{2}$
   L'élément neutre pour $\times$ est $1 = 1 + 0\sqrt{2}$ donc $\boxed{1 \in A}$.
   On en déduit que $(A, +, \times)$ est un anneau commutatif (On aurait pu prouver aussi que c'est un **sous-anneau** de $(\mathbb{R}, +, \times)$)

2. ϕ est une application de A dans A. si $x = n + m\sqrt{2}$ et $x' = n' + m'\sqrt{2}$ on a
   $$\phi(x + x') = \phi(n + n' + \sqrt{2}(m + m')) = n + n' + \sqrt{2}(m + m') = \phi(x) + \phi(x')$$
   $$\begin{aligned} \phi(xx') &= \phi(nn' + 2mm' + \sqrt{2}(nm' + mn')) = nn' + 2mm' - \sqrt{2}(nm' + mn') \\ &= (n - m\sqrt{2})(n' - m'\sqrt{2}) \\ &= \phi(x).\phi(x') \end{aligned}$$
   $$\phi(1) = 1$$
   Pour montrer que ϕ est bijective , on peut remarquer que pour $x = n - m\sqrt{2}$,
   $$\phi o\phi(x) = \phi(n - m\sqrt{2}) = n + m\sqrt{2} = x.$$
   Donc $\phi o \phi = Id_A$ Ainsi $\phi^{-1} = \phi$.
   Donc ϕ est un automorphisme de A

3. soit $x = n + m\sqrt{2} \in A$ et $y = n' + m'\sqrt{2}$. On a $N(x) = x.\phi(x) = n^2 - 2m^2$. et $N(y) = y.\phi(y) = n'^2 - 2m'^2$
   Donc
   $$N(xy) = xy\phi(xy) = xy\phi(x)\phi(y) = N(x)N(y)$$

4. $\times$ est une loi de composition interne sur A^* puisque si x et y sont inversibles dans A pour $\times$ il existe x' et y' dans A tels que $xx' = 1$ et $yy' = 1$. on a alors $xy.x'y' = 1$ donc $x'y'$ est l'inverse de xy dans A.
   $\times$ est clairement associative, l'élément neutre $1 \in A^*$, et par définition tout élément de A^* est inversible et son inverse appartient à A^*.
   ($\Rightarrow$) Supposons que $N(x) = 1$. on a alors $x\phi(x) = 1$ donc x est inversible et $x^{-1} = \phi(x)$. De même si $N(x) = -1$. on a alors $x\phi(x) = -1$ donc x est inversible et $x^{-1} = -\phi(x)$
   ($\Leftarrow$) Réciproquement supposons que $x = n + m\sqrt{2}$ est inversible dans A : il existe $y = n' + m'\sqrt{2}$ dans A tel que $xy = 1$. Ainsi $N(xy) = 1 = N(x).N(y) = (n^2 - 2m^2)(n'^2 - 2m'^2)$ et $N(x) \in \mathbb{Z}$ et $N(y) \in \mathbb{Z}$.
   Dans $\mathbb{Z}$ les seuls éléments inversibles sont 1 et -1. Donc $N(x) = 1$ ou bien $N(x) = -1$

5. $N(1 + \sqrt{2}) = -1$ donc $x = 1 + \sqrt{2}$ est inversible et $x^{-1} = (1 + \sqrt{2})^{-1} = -\phi(x) = -1 + \sqrt{2}$ (on vérifie que $(1 + \sqrt{2}) \times (-1 + \sqrt{2}) = 1$)
   Attention il fallait vérifier que $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$ s'érit bien sous la forme $n + m\sqrt{2}$!!!
   On sait que A^* est un **groupe** pour $\times$ donc pour tout entier naturel n, $(1+\sqrt{2})^n = (1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})..(1+\sqrt{2}) \in A^*$ puisque $\times$ est une loi de composition interne dans A^*. De plus l'inverse de $(1 + \sqrt{2})^n$ est $(-1 + \sqrt{2})^n$

6. Soit $x = a + b\sqrt{2} \in A^*$ avec a, b entiers naturels non nuls.
   (a) si $a^2 - 2b^2 = 1$ alors $a^2 = 1 + 2b^2$ donc $b^2 < a^2 < 4b^2$
   si $a^2 - 2b^2 = -1$ alors $a^2 = -1 + 2b^2$ donc $b^2 \leqslant a^2 < 4b^2$

   On en déduit que $b \leqslant a < 2b$

   (b) On pose $\frac{a+b\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = (a + b\sqrt{2})(-1 + \sqrt{2}) = -a + 2b + (a - b)\sqrt{2} = a_1 + \sqrt{2}b_1$.
   Notons que $a_1 + \sqrt{2}b_1$ appartient à A^* puisque A^* est un groupe.
   On a $a_1 = -a + 2b > 0$ et $-a + 2b \leqslant a$ puisque $b \leqslant a < 2b$
   De même $b_1 = a - b \geq 0$ puisque $b \leqslant a$ et $b_1 < b$ puisque $a < 2b$

   (c) Considérons, pour $x = a + b\sqrt{2} \in A^*$ avec a, b deux entiers naturels non nuls, l'élément $y = \frac{a+b\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = -a + 2b + (a - b)\sqrt{2} = a_1 + \sqrt{2}b$.On a d'après ce qui précède $0 < a_1 \leqslant a$ et $0 \leqslant b_1 < b$.
   Premier cas : $\boxed{b_1 = 0}$. On a alors $y = a_1$ qui est inversible dans A donc tel que $N(y) = a_1^2 = \pm 1$. la seule possibilité est $a_1 = 1$. Conclusion $\frac{a+b\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = 1$ et donc $\boxed{a + b\sqrt{2} = 1 + \sqrt{2}}$
   Deuxième cas : $\boxed{b_1 > 0}$. On peut alors recommencer le processus puisque a_1 et b_1 sont deux entiers naturels non nuls , et poser
   $$a_2 + \sqrt{2}b_2 = \frac{a_1 + \sqrt{2}b_1.}{1 + \sqrt{2}} = \frac{a + \sqrt{2}b.}{(1 + \sqrt{2})^2} \in A^*$$
   cet élément vérifie $0 < a_2 \leqslant a_1$ et $0 \leqslant b_2 < b_1 < b$
   la discussion recommence : si $\boxed{b_2 = 0}$ on obtient alors nécessairement $a_2 = 1$ donc $\boxed{a + \sqrt{2}b = (1 + \sqrt{2})^2}$
   si $\boxed{b_2 > 0}$ on peut réitérer le processus et construire $a_3 + \sqrt{2}b_3 = \frac{a_2+\sqrt{2}b_2.}{1+\sqrt{2}} = \frac{a+\sqrt{2}b.}{(1+\sqrt{2})^3}$, etc....
   Mise en forme: considérons pour tout entier $k \geq 0$ l'élément $x_k = a_k + \sqrt{2}b_k = \frac{a+\sqrt{2}b}{(1+\sqrt{2})^k}$ qui appartient à A^* puisque $(1 + \sqrt{2})^k$ est inversible .
   Soit $E = \{k \in \mathbb{N}$ tels que $0 < a_k$ et $0 < b_k\}$. E contient 0, et lorsque $k \in E$ on a alors $0 < a_{k+1} \leqslant a_k$ et $0 \leqslant b_{k+1} < b_k$. Ainsi soit $b_{k+1} > 0$ et dans ce cas on a $k + 1 \in E$, soit $b_{k+1} = 0$ et dans ce cas on a $a_{k+1} = 1$.
   En supposant que $E = \mathbb{N}$, la suite (b_k) serait strictement décroissante à valeurs dans $\mathbb{N}$, ce qui est impossible.
   Donc il existe un entier naturel n_0 tel que $n_0 \in E$ et $n_0 + 1 \notin E$. (sinon le principe de récurrence prouverait que $E = \mathbb{N}$) .donc $b_{n_0+1} = 0$ et $a_{n_0+1} = 1$ d'ou $\boxed{\frac{a+\sqrt{2}b}{(1+\sqrt{2})^{n_0+1}} = 1}$.
   Conclusion : il existe un entier naturel $k \in \mathbb{N}$ tel que $a + \sqrt{2}b = (1 + \sqrt{2})^k$
   Réciproquement nous savons que $(1 + \sqrt{2})^k$ est inversible dans A d'inverse $(-1 + \sqrt{2})^k$
   Considérons maintenant un élément quelconque $x = a + b\sqrt{2}$ de A^*
   Pour cet élément $N(x) = a^2 - 2b^2 = \pm 1$, donc a ne peut être nul.
   remarquons que x inversible $\Leftrightarrow$ $\phi(x)$ inversible puisque ϕ est un automorphisme
   On a donc 4 cas :
   $\boxed{0 < a \text{ et } 0 \leqslant b}$: dans ce cas il existe un entier naturel k tel que $x = (1 + \sqrt{2})^k$
   $\boxed{0 < a \text{ et } b < 0}$: dans ce cas $\phi(x) = a - b\sqrt{2}$: on se ramène au premier cas pour $\phi(x)$: il existe un entier naturel k tel que $\phi(x) = (1 + \sqrt{2})^k$ donc $x = (1 - \sqrt{2})^k$
   $\boxed{a < 0 \text{ et } 0 \leqslant b}$: dans ce cas $-\phi(x) = -a + b\sqrt{2}$: on se ramène au premier cas pour $-\phi(x)$: il existe un entier naturel k tel que $-\phi(x) = (1 + \sqrt{2})^k$ donc $x = -(1 - \sqrt{2})^k$
   $\boxed{a < 0 \text{ et } b \leqslant 0}$: dans ce cas $-x = -a - b\sqrt{2}$: on se ramène au premier cas : il existe un entier naturel k tel que $-x = (1 + \sqrt{2})^k$ donc $x = -(1 + \sqrt{2})^k$
   Conclusion
   $$A^* = \left\{\pm(1 \pm \sqrt{2})^n, n \in \mathbb{N}\right\}$$

PROBLÈME

Partie I : Etude des longueurs des séries.

1 $L_1(\Omega_n) = [1, n]$.
Si $m < n$,

$\{L_1 = m\}$ se réalise si et seulement si les m premiers lancers donnent Pile et le $(n+1)^{\text{ème}}$ Face ou les m premiers lancers donnent Face et le $(n+1)^{\text{ème}}$ Pile. Ainsi :

$$\boxed{\{L_1 = n\} = (P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_m \cap F_{m+1}) \cup (F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_m \cap P_{m+1}).}$$

Par incompatibilité $P(L_1 = m) = P(P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_m \cap F_{m+1}) + P(F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_m \cap P_{m+1})$.

Par indépendance : $P(L_1 = m) = P(P_1)\, P(P_2) \ldots P(P_m)\, P(F_{m+1}) + P(F_1)\, P(F_2) \ldots P(F_m)\, P(P_{m+1})$.

$$\boxed{\forall m < n,\ P(L_1 = m) = p^m\, q + q^m\, p.}$$

$$\boxed{\text{Si } m = n,\ \ P(L_1 = n) = p^n + q^n}$$

2. a. $L_2(\omega_n) = [0, n-1]$.

2. b. Soit m et k deux éléments de $\mathbb{N}^*$ tels que $m + k < n$.

$\{L_1 = m\} \cap \{L_2 = k\}$ se réalise si et seulement si les n premiers lancers donnent Pile, les k suivants Face et le $(m+k+1)^{\text{ème}}$ Pile ou les m premiers lancers donnent Face, les k suivants Pile et le $(m+k+1)^{\text{ème}}$ Face. Ainsi :

$\{L_1 = m\} \cap \{L_2 = k\} = (P_1 \cap \cdots \cap P_m \cap F_{m+1} \cap \cdots \cap F_{m+k} \cap P_{m+k+1}) \cup (F_1 \cap \cdots \cap F_m \cap P_{m+1} \cap \cdots \cap P_{m+k} \cap F_{m+k+1})$.

Soient n et k deux éléments de $\mathbb{N}^*$. Par incompatibilité puis par indépendance ,$P(\{L_1 = m\} \cap \{L_2 = k\})$ vaut encore :

$$\left(\prod_{i=1}^{m} P(P_i)\right) \left(\prod_{i=m+1}^{m+k} P(F_i)\right) P(P_{m+k+1}) + \left(\prod_{i=1}^{m} P(F_i)\right) \left(\prod_{i=m+1}^{m+k} P(P_i)\right) P(F_{m+k+1}).$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(\{L_1 = m\} \cap \{L_2 = k\}) = p^{m+1}\, q^k + q^{m+1}\, p^k\ .}$$

c. Si $m + k = n$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(\{L_1 = m\} \cap \{L_2 = k\}) = p^m\, q^{n-m} + q^m\, p^{n-m}\ .}$$

d. $\big(\{L_1 = m\}\big)_{1 \leqslant m \leqslant n}$ est un système complet d'événements. La formule des probabilités totales donne alors :

$P(L_2 = k) = \displaystyle\sum_{n=1}^{n} P(\{L_1 = m\} \cap \{L_2 = k\})$.

Ainsi $P(L_2 = k) = \displaystyle\sum_{n=1}^{n-k-1} \left(p^{m+1}\, q^k + q^{m+1}\, p^k\right) + p^m q^{n-m} + q^n p^{n-m}$

$\ldots = q^k p^2 \dfrac{1 - p^{n-k-1}}{1-p} + p^k q^2 \dfrac{1 - q^{n-k-1}}{1-q} + p^{n-k} q^k + q^{n-k} p^k$.

Finalement

$$\boxed{P(L_2 = k) = q^{k-1} p^2 (1 - p^{n-k-1}) + q^2\, p^{k-1} (1 - q^{n-k-1}) + p^{n-k} q^k + q^{n-k} p^k.}$$

e. On a $(L_2 = 0) = (L_1 = n)$, donc $P(L_2 = 0) = p^n + q^n$.

Partie II : Etude du nombre de séries lors des n premiers lancers.

1. • N_1 est la variable certaine égale à 1.

$$\boxed{N_1(\Omega) = \{1\},\ P(N_1 = 1) = 1 \text{ et } E(N_1) = 1.}$$

• $N_2(\Omega) = [\![1, 2]\!]$. $\{N_2 = 1\} = (P_1 \cap P_2) \cup (F_1 \cap F_2)$. Par incompatibilité et indépendance on obtient :

$P(N_2 = 1) = P(P_1 \cap P_2) + P(F_1 \cap F_2) = P(P_1)\, P(P_2) + P(F_1)\, P(F_2) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}\cdot$

Alors $P(N_2 = 2) = 1 - P(N_2 = 1) = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}\cdot$

$E(N_2) = 1 \times \dfrac{1}{2} + 2 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}\cdot$

$$\boxed{N_2(\Omega) = [\![1, 2]\!],\ P(N_2 = 1) = P(N_2 = 2) = \frac{1}{2} \text{ et } E(N_2) = \frac{3}{2}\cdot}$$

▲ *Remarque* $E(N_2^2) = 1^2 \times \dfrac{1}{2} + 2^2 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2}$ *et* $V(N_2) = E(N_2^2) - \big(E(N_2)\big)^2 = \dfrac{5}{2} - \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}\cdot$ ▼

• $N_3(\Omega) = [\![1, 3]\!]$. $\{N_3 = 1\} = (P_1 \cap P_2 \cap P_3) \cup (F_1 \cap F_2 \cap F_3)$.

Par incompatibilité et indépendance on obtient :

$P(N_3 = 1) = P(P_1 \cap P_2 \cap P_3) + P(F_1 \cap F_2 \cap F_3) = P(P_1)\, P(P_2)\, P(P_3) + P(F_1)\, P(F_2)\, P(F_3)$.

$P(N_3 = 1) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}\cdot$

$\{N_3 = 3\} = (P_1 \cap F_2 \cap P_3) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3)$. Par incompatibilité et indépendance on obtient :

$P(N_3=3)=P(P_1\cap F_2\cap P_3)+P(F_1\cap P_2\cap F_3)=P(P_1)\,P(F_2)\,P(P_3)+P(F_1)\,P(P_2)\,P(F_3)$.

$P(N_3=3)=\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

Alors $P(N_3=2)=1-P(N_3=1)-P(N_3=3)=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

$E(N_3)=1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{4}=2$.

$$\boxed{N_3(\Omega)=[\![1,3]\!],\ P(N_3=1)=\frac{1}{4},\ P(N_3=2)=\frac{1}{2},\ P(N_3=3)=\frac{1}{4}\text{ et }E(N_3)=2.}$$

2.

Si k est un élément pair de $[\![1,n]\!]$ et si l'événement $P_1\cap F_2\cap P_3\cap F_4\cap\cdots\cap P_{k-1}\cap F_k\cap F_{k+1}\cap\cdots\cap F_n$ se réalise alors l'événement $\{N_n=k\}$ se réalise.

Si k est un élément impair de $[\![1,n]\!]$ et si l'événement $P_1\cap F_2\cap P_3 F_4\cap\cdots\cap P_{k-2}\cap F_{k-1}\cap P_k\cap P_{k+1}\cap\cdots\cap P_n$ se réalise alors l'événement $\{N_n=k\}$ se réalise. Ainsi :

$$\boxed{N_n(\Omega)=[\![1,n]\!].}$$

$\{N_n=1\}=(P_1\cap P_2\cap\cdots\cap P_n)\cup(F_1\cap F_2\cap\cdots\cap F_n)$. Par indépendance et incompatibilité on obtient :

$P(N_n=1)=P(P_1\cap P_2\cap\cdots\cap P_n)+P(F_1\cap F_2\cap\cdots\cap F_n)=P(P_1)\,P(P_2)\cdots P(P_n)+P(F_1)\,P(F_2)\cdots P(F_n)$.

Ainsi $P(N_n=1)=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^{n-1}}$.

Supposons n pair.

$\{N_n=n\}=(P_1\cap F_2\cap P_3\cap F_4\cap\cdots\cap P_{n-1}\cap F_n)\cup(F_1\cap P_2\cap F_3\cap P_4\cap\cdots\cap F_{n-1}\cap P_n)$.

Ici encore par indépendance et incompatibilité on obtient : $P(N_n=n)=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^{n-1}}$.

Supposons n impair.

$\{N_n=n\}=(P_1\cap F_2\cap P_3\cap F_4\cap\cdots\cap P_{n-2}\cap F_{n-1}\cap P_n)\cup(F_1\cap P_2\cap F_3\cap P_4\cap\cdots\cap F_{n-2}\cap P_{n-1}\cap F_n)$.

Toujours par indépendance et incompatibilité on obtient : $P(N_n=n)=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^{n-1}}$.

$$\boxed{\text{Si } n \text{ est un élément de } \mathbb{N}^*,\ P(N_n=1)=\frac{1}{2^{n-1}}\text{ et }P(N_n=n)=\frac{1}{2^{n-1}}.}$$

3.

4. a. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Soit s un élément de $[0,1]$.

Le théorème de transfert pour l'esprance montre que $E(s^{N_n})=\sum_{k=1}^{n}s^k\,P(N_n=k)$. Ainsi $E(s^{N_n})=G_n(s)$.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall s\in[0,1],\ E(s^{N_n})=G_n(s).}$$

b. G_n est dérivable sur $[0,1]$, comme fonction polynôme et $\forall s\in[0,1],\ G'_n(s)=\sum_{k=1}^{n}P(N_n=k)\,k\,s^{k-1}$.

Alors $G'_n(1)=\sum_{k=1}^{n}P(N_n=k)\,k\,1^{k-1}=\sum_{k=1}^{n}k\,P(N_n=k)=E(N_n)$.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ G'_n(1)=E(N_n).}$$

c. Soient n un élément de $[\![2,+\infty[\![$ et k un élément de $[\![1,n]\!]$.

(P_{n-1},F_{n-1}) est un système complet d'événements. La formule des probabilités totales donne alors :

$P(\{N_n=k\}\cap P_n)=P(\{N_n=k\}\cap P_n\cap P_{n-1})+P(\{N_n=k\}\cap P_n\cap F_{n-1})$. Observons alors que :

$\{N_n=k\}\cap P_n\cap P_{n-1}=\{N_{n-1}=k\}\cap P_n\cap P_{n-1}$ et $\{N_n=k\}\cap P_n\cap F_{n-1}=\{N_{n-1}=k-1\}\cap P_n\cap F_{n-1}$.

Ainsi : $P(\{N_n=k\}\cap P_n)=P(\{N_{n-1}=k\}\cap P_n\cap P_{n-1})+P(\{N_{n-1}=k-1\}\cap P_n\cap F_{n-1})$.

Par indépendance des lancers on a :

$P(\{N_{n-1}=k\}\cap P_n\cap P_{n-1})=P(\{N_{n-1}=k\}\cap P_{n-1})\,P(P_n)=\frac{1}{2}P(\{N_{n-1}=k\}\cap P_{n-1})$.

De même : $P(\{N_{n-1}=k-1\}\cap P_n\cap F_{n-1})=P(\{N_{n-1}=k-1\}\cap F_{n-1})\,P(P_n)=\frac{1}{2}P(\{N_{n-1}=k-1\}\cap F_{n-1})$.

Alors : $P(\{N_n=k\}\cap P_n)=\frac{1}{2}P(\{N_{n-1}=k\}\cap P_{n-1})+\frac{1}{2}P(\{N_{n-1}=k-1\}\cap F_{n-1})$.

$$\boxed{\forall n\in[\![2,+\infty[\![,\ \forall k\in[\![1,n]\!],\ P(\{N_n=k\}\cap P_n)=\frac{1}{2}P(\{N_{n-1}=k\}\cap P_{n-1})+\frac{1}{2}P(\{N_{n-1}=k-1\}\cap F_{n-1}).}$$

De même :

$$\boxed{\forall n\in[\![2,+\infty[\![,\ \forall k\in[\![1,n]\!],\ P(\{N_n=k\}\cap F_n)=\frac{1}{2}P(\{N_{n-1}=k\}\cap F_{n-1})+\frac{1}{2}P(\{N_{n-1}=k-1\}\cap P_{n-1}).}$$

Soient n un élément de $[\![2,+\infty[\![$ et k un élément de $[\![1,n]\!]$.

(F_n,P_n) est un système complet dévénements. La formule des probabilités totales donne alors :

$P(N_n=k)=P(\{N_n=k\}\cap P_n)+P(\{N_n=k\}\cap F_n)$. Alors :

$P(N_n=k)=\frac{1}{2}P(\{N_{n-1}=k\}\cap P_{n-1})+\frac{1}{2}P(\{N_{n-1}=k-1\}\cap F_{n-1})+\frac{1}{2}P(\{N_{n-1}=k\}\cap F_{n-1})+\frac{1}{2}P(\{N_{n-1}=k-1\}\cap P_{n-1})$.

Or (P_{n-1},F_{n-1}) est un système complet d'événements donc :

$\frac{1}{2}P(\{N_{n-1}=k\}\cap P_{n-1})+\frac{1}{2}P(\{N_{n-1}=k\}\cap F_{n-1})=\frac{1}{2}P(N_{n-1}=k)$.

De même : $\frac{1}{2}P(\{N_{n-1}=k-1\}\cap F_{n-1})+\frac{1}{2}P(\{N_{n-1}=k-1\}\cap P_{n-1})=\frac{1}{2}P(N_{n-1}=k-1)$.

Par conséquent : $P(N_n = k) = \dfrac{1}{2}\,P(N_{n-1} = k) + \dfrac{1}{2}\,P(N_{n-1} = k-1)$.

$$\boxed{\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ \forall k \in [\![1, n]\!],\ P(N_n = k) = \frac{1}{2}\,P(N_{n-1} = k) + \frac{1}{2}\,P(N_{n-1} = k-1).}$$

d. Soit n un élément de $[\![2, +\infty[\![$ et soit s un élément de $[0, 1]$.

$G_n(s) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(N_n = k)\,s^k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\,P(N_{n-1} = k) + \frac{1}{2}\,P(N_{n-1} = k-1)\right)s^k.$

$G_n(s) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(N_{n-1} = k)\,s^k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} P(N_{n-1} = k-1)\,s^k.$

$G_n(s) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{\boxed{\text{n-1}}} P(N_{n-1} = k)\,s^k + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} P(N_{n-1} = i)\,s^{i+1}.$

$G_n(s) = \dfrac{1}{2}\,G_{n-1}(s) + \dfrac{1}{2}\left(\displaystyle\sum_{i=\boxed{1}}^{n-1} P(N_{n-1} = i)\,s^i\right)s = \frac{1}{2}\,G_{n-1}(s) + \frac{s}{2}\,G_{n-1}(s) = \frac{1+s}{2}\,G_{n-1}(s).$

$$\boxed{\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ \forall s \in [0, 1],\ G_n(s) = \frac{1+s}{2}\,G_{n-1}(s).}$$

$\forall s \in [0, 1],\ G_1(s) = \displaystyle\sum_{k=1}^{1} P(N_1 = k)\,s^k = P(N_1 = 1)\,s = s.$

$$\boxed{\forall s \in [0, 1],\ G_1(s) = s.}$$

Soit s un élément de $[0, 1]$. $\big(G_n(s)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1+s}{2}$ et de premier terme s.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ G_n(s) = \left(\dfrac{1+s}{2}\right)^{n-1} s.$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall s \in [0, 1],\ G_n(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1} s.}$$

▲ *Remarque* *Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.*

$\forall s \in [0, 1],\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(N_n = k)\,s^k = G_n(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1} s = s\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-k}\left(\frac{s}{2}\right)^k.$

$\forall s \in [0, 1],\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(N_n = k)\,s^k = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} s^{k+1}.$

Un petit changement d'indice dans la seconde somme fournit :

$\forall s \in [0, 1],\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(N_n = k)\,s^k = \sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} s^k.$

Alors $\forall s \in [0, 1],\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(P(N_n = k) - \binom{n-1}{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) s^k = 0.$

Le polynôme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(P(N_n = k) - \binom{n-1}{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) X^k$ *admet donc une infinité de racines ; c'est donc le polynôme nul.*

Ainsi $\forall k \in [\![1, n]\!],\ P(N_n = k) - \dbinom{n-1}{k-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ *ou* $\forall k \in [\![1, n]\!],\ P(N_n = k) = \dbinom{n-1}{k-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}.$

$N_n - 1$ *suit donc la loi binômiale de paramètres* $n-1$ *et* $\dfrac{1}{2}\cdot$

e. Soit n un élément de $[\![2, +\infty[\![$.

$\forall s \in [0, 1],\ G_n(s) = \left(\dfrac{1+s}{2}\right)^{n-1} s$ donc $\forall s \in [0, 1],\ G_n'(s) = (n-1)\,\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1+s}{2}\right)^{n-2} s + \left(\dfrac{1+s}{2}\right)^{n-1}.$

Alors $E(N_n) = G_n'(1) = (n-1)\,\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1+1}{2}\right)^{n-2} \times 1 + \left(\dfrac{1+1}{2}\right)^{n-1} = (n-1)\,\dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{n+1}{2}\cdot$

Ainsi $E(N_n) = \dfrac{n+1}{2}\cdot$ Notons que ceci vaut encore pour $n = 1$ car $E(N_1) = 1$. Par conséquent :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ E(N_n) = \frac{n+1}{2}\cdot}$$