1

PROBABILITÉS

Exercice 3.1.

1. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle vérifiant $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

1. a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n} kP(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n).$$

1. b) On suppose que la variable aléatoire X admet une espérance notée $E(X)$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant nP(X > n) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(X = k)$.

En déduire que la série de terme général $P(X > n)$ converge et que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n) = E(X).$$

1. c) On suppose que la série de terme général $P(X > n)$ converge. Montrer que la série de terme général $kP(X = k)$ converge et que X admet une espérance.

1. d) Énoncer le théorème qui vient d'être établi.

2. Un horticulteur plante n oignons de narcisse dans un jardin (avec $n \in \mathbb{N}^*$). Chaque oignon est susceptible de fleurir au printemps et ne donne une fleur qu'avec la probabilité p ; de plus, s'il donne une fleur une année, il refleurit de manière certaine les années suivantes mais s'il n'en donne pas, cela n'influe en rien sur ce qui est susceptible de se passer les années suivantes.

Pour $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on note X_j le nombre aléatoire d'années nécessaires au narcisse numéro j pour produire une première fleur. On suppose que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires et qu'elles sont mutuellement indépendantes.
On note X le nombre aléatoire d'années au bout duquel le jardin sera, pour la première fois, fleuri des n narcisses.

2. a) Exprimer X en fonction de $X_1, X_2, \ldots, X_n$, et calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X > k)$.

2. b) En déduire que X admet une espérance et exprimer cette espérance comme somme d'une série.

3. Déterminer un équivalent simple de $E(X)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
On utilisera des intégrales bien choisies de la fonction $x \mapsto 1 - \big(1 - (1-p)^x\big)^n$ *ainsi que le changement de variable* $x = \dfrac{\ln(1-t)}{\ln(1-p)}$.

Solution :

1. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} kP(X = k) &= \sum_{k=0}^{n} kP(X > k-1) - \sum_{k=0}^{n} kP(X > k)\\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)P(X > j) - \sum_{j=0}^{n} jP(X > j)\\ &= \sum_{j=0}^{n-1} P(X > j) - nP(X > n)\end{aligned}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant nP(X > n) = n \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} P(X = k) \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} kP(X = k)$ (la dernière série converge, car X admet une espérance).
Comme le reste d'ordre n d'une série convergente tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, il vient par encadrement :

$$\lim_{n\to\infty} nP(X > n) = 0$$

Il résulte alors du a) que la série de terme général $P(X > n)$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(X > n) = E(X)$$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=0}^{n} kP(X = k) \leqslant \sum\limits_{j=0}^{n-1} P(X > j) \leqslant \sum\limits_{j=0}^{\infty} P(X > j)$ (car la dernière série est à termes positifs et convergente).
On en conclut que la série de terme général positif $kP(X = k)$ converge et donc que X admet une espérance.

d) On vient de montrer que si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $P(X > n)$ converge et dans ce cas :

$$E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X > n)$$

2 a) Il est clair que $X = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Soit $k \in \mathbb{N}$; par indépendance on a :

$P(X \leqslant k) = \prod_{j=1}^{n} P(X_j \leqslant k) = \prod_{j=1}^{n} [1 - (1-p)^k] = [1 - (1-p)^k]^n$, ainsi :

$$P(X > k) = 1 - [1 - (1-p)^k]^n$$

b) $\lim_{k \to \infty} (1-p)^k = 0$ et on sait qu'au voisinage de 0 (pour h) : $(1+h)^n - 1 \sim nh$

En conséquence : $P(X > k) \underset{(k \to \infty)}{\sim} n(1-p)^k$

Il s'ensuit que la série de terme général positif $P(X > n)$ converge, puisque celui-ci est équivalent au terme général d'une série géométrique convergente.

On conclut que X admet une espérance, avec :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} [1 - (1 - (1-p)^k)^n]$$

3. la fonction $f : x \mapsto 1 - (1 - (1-p)^x)^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \geqslant 0$:

$$f'(x) = n(1 - (1-p)^x)^{n-1}(1-p)^x \ln(1-p) \leqslant 0$$

Donc f est décroissante et pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{m+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=0}^{m} f(k) \leqslant f(0) + \int_0^m f(x)\,dx$$

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Le changement de variable $x = \dfrac{\ln(1-t)}{\ln(1-p)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0, 1-(1-p)^m]$ vers $[0, m]$ et donne :

$$\int_0^m f(x)\,dx = -\frac{1}{\ln(1-p)} \int_0^{1-(1-p)^m} \frac{1-t^n}{1-t}\,dt = -\frac{1}{\ln(1-p)} \Big[\sum_{k=1}^{n} \frac{t^k}{k} \Big]_0^{1-(1-p)^m}$$

Quand m tend vers l'infini, $1 - (1-p)^m$ tend vers 1 et donc l'intégrale $\int_0^m f(x)\,dx$ tend vers $-\dfrac{1}{\ln(1-p)} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

En passant à la limite lorsque m tend vers $+\infty$, on obtient donc :

$$-\frac{1}{\ln(1-p)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant E(X) \leqslant 1 - \frac{1}{\ln(1-p)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

On conclut classiquement que l'on a :

$$E(X) \underset{(n \to \infty)}{\sim} -\frac{\ln n}{\ln(1-p)}$$

Exercice 3.2.

Une urne U_1 contient n boules blanches et une urne U_2 contient n boules noires.

On tire à chaque tirage simultanément une boule dans U_1 que l'on met dans U_2 et une boule dans U_2 que l'on met dans U_1.

On note, pour $k \geqslant 1$, X_k la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches dans U_1 après le k-ième tirage, et X_0 la variable constante égale à n.

On pose, pour $k \geqslant 0$, $Z_k = \begin{pmatrix} P(X_k = 0) \\ P(X_k = 1) \\ \vdots \\ P(X_k = n) \end{pmatrix}$.

1. a) Déterminer la matrice A_n telle que, pour $k \geqslant 1$, $Z_k = \frac{1}{n^2} A_n Z_{k-1}$.

b) Quelle est la probabilité qu'au bout de n tirages on n'ait que des boules noires dans U_1 ? Quel(s) coefficient(s) de A_n^n peut-on en déduire ?

2. On se place dans le cas $n = 2$.

a) Etudier la suite de terme général $E(X_k)$.

b) Montrer que $Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $Y_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de A_2.

c) En remarquant que $Z_0 = \frac{1}{6} Y_1 + \frac{1}{3} Y_2 - \frac{1}{2} Y_3$, déterminer Z_k pour $k \geqslant 1$.

d) En déduire, pour $0 \leqslant i \leqslant 2$, la limite de $P(X_k = i)$ lorsque k tend vers l'infini.

Solution :

1. a) Pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, on peut écrire
$$P(X_k = i) = \sum_{j=0}^{n} P(X_k = i / X_{k-1} = j) P(X_{k-1} = j)$$
Or, si $i \notin \{j-1, j, j+1\}$, $P(X_k = i / X_{k-1} = j) = 0$ et
$$P(X_k = j-1 / X_{k-1} = j) = \frac{j^2}{n^2} \,;\, P(X_k = j / X_{k-1} = j) = \frac{2j(n-j)}{n^2} \,;$$
$$P(X_k = j+1 / X_{k-1} = j) = \frac{(n-j)^2}{n^2}$$
Donc :
$$P(X_k = 0) = \frac{1}{n^2} P(X_{k-1} = 1), P(X_k = n) = \frac{1}{n^2} P(X_{k-1} = n-1) \,;$$
et pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$:

$$P(X_k=i)=\frac{(n-i-1)^2}{n^2}P(X_{k-1}=i-1)+\frac{2i(n-i)}{n^2}P(X_{k-1}=i)$$
$$+\frac{(i+1)^2}{n^2}P(X_{k-1}=i+1)$$

ce qui donne :

$$A_n=\begin{pmatrix} 0 & 1^2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n^2 & 2(n-1) & 2^2 & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & (n-1)^2 & 4(n-2) & 3^2 & \cdots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 2^2 & 2(n-1) & n^2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1^2 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Le nombre de boules blanches dans U_1 diminue d'au plus une unité à chaque tirage. Il diminue de n en n tirages si et seulement s'il diminue d'une unité à chaque tirage, c'est-à-dire si et seulement si à chaque tirage on tire une boule noire de U_2 et une boule blanche de U_1.
Ainsi :

$$P(X_n=0)=\prod_{k=0}^{n}\frac{(n-k)^2}{n^2}=\frac{(n!)^2}{n^{2n}}$$

or : $Z_n=\left(\frac{1}{n^2}\right)^n A_n^n\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$, est de premier coefficient $P(X_n=0)$

On en déduit que le coefficient $A_{1,n+1}$ de A_n^n vaut $(n!)^2$.

2. Il vient $A_2=\begin{pmatrix}0&1&0\\4&2&4\\0&1&0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}P(X_k=0)\\P(X_k=1)\\P(X_k=2)\end{pmatrix}=\frac{1}{4}A_2\begin{pmatrix}P(X_{k-1}=0)\\P(X_{k-1}=1)\\P(X_{k-1}=2)\end{pmatrix}$

a) Un calcul élémentaire donne, pour tout $k\geqslant 1$:

$$\begin{aligned}E(X_k)&=P(X_k=1)+2P(X_k=2)\\&=P(X_{k-1}=0)+\frac{1}{2}P(X_{k-1}=1)+P(X_{k-1}=2)+2\frac{1}{4}P(X_{k-1}=1)\\&=P(X_{k-1}=0)+P(X_{k-1}=1)+P(X_{k-1}=2)=1\end{aligned}$$

b) Il suffit d'effectuer le calcul pour voir que :

$$A_2Y_1=4Y_1,A_2Y_2=-2Y_2,A_2Y_3=0$$

c) On a :

$$\begin{aligned}Z_k&=\frac{1}{4^k}A_2^kZ_0=\frac{1}{4^k}\left(\frac{1}{6}A_2^kY_1+\frac{1}{3}A_2^kY_2-\frac{1}{2}A_2^kY_3\right)=\frac{1}{4^k}\left(\frac{1}{6}4^kY_1+\frac{1}{3}(-2)^kY_2\right)\\&=\frac{1}{6}Y_1+\frac{1}{3\times 2^k}(-1)^kY_2\end{aligned}$$

($-Y$ suit donc la loi exponentielle de paramètre 1).

Exercice 3.6.

On dispose d'une infinité de pièces. La $k^{\text{ème}}$ pièce donne Pile avec la probabilité $p_k \in]0,1[$ et Face avec la probabilité $q_k = 1 - p_k$. On effectue une infinité de lancers, le $k^{\text{ème}}$ lancer utilisant la $k^{\text{ème}}$ pièce.

Pour tout $n \geqslant 1$, on définit une variable aléatoire réelle Y_n par

$$Y_n = \begin{cases} 0 & \text{si Face est tombé au } n^{\text{ème}} \text{ lancer} \\ 1 & \text{si Pile est tombé au } n^{\text{ème}} \text{ lancer} \end{cases}$$

On pose de plus $Y_0 = 0$.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de variables aléatoires définies par $X_0 = 0$ et pour tout $n \geqslant 1$:

$$X_n = n - \max\{0 \leqslant i \leqslant n \mid Y_i = 0\}$$

1. a) Que représente la variable aléatoire X_n ?

b) Déterminer la loi de X_n.

2. Soit T la variable aléatoire définie par $T = \inf\{m \geqslant 1 \mid X_m = 0\}$, si cet ensemble est non vide et $T = 0$ si $\{m \geqslant 1 \mid X_m = 0\}$ est vide.

a) Calculer la probabilité de l'événement $(T = 0)$.

b) Montrer que $P(T = 0) = 0$ si et seulement si la série $\sum\limits_{k\geqslant 1}(1-p_k)$ diverge.

3. On suppose désormais que pour tout $k \geqslant 1, p_k = p$. Pour $n \geqslant 1$, calculer la probabilité $P(T = n)$.
Quelle est la loi de $T - 1$? En déduire l'espérance de T.

Solution :

1. a) X_n représente la longueur de la dernière séquence de Pile, après le dernier Face, à l'issue du n-ième lancer (cette séquence pouvant être de longueur nulle).

b) On a $X_n(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}$. De plus :

• l'événement $(X_n = 0)$ est l'événement « le dernier lancer est Face » ; donc $P(X_n = 0) = 1 - p_n$.

• L'événement $(X_n = 1)$ correspond à « on a eu Pile au n-ième lancer et Face au $(n-1)$-ième lancer » ; donc $P(X_n = 1) = p_n(1 - p_{n-1})$.

• Plus généralement, pour tout $k \geqslant 2$, l'événement $(X_n = k)$ correspond à « on a eu Pile aux lancers $n, n-1, \ldots, n-k+1$ et Face au $(n-k)$-ième lancer » ; donc $P(X_n = k) = p_n p_{n-1} \ldots p_{n-k+1}(1 - p_{n-k})$.

2. a) La variable aléatoire T représente l'instant d'apparition du premier Face. L'événement $(T = 0)$ est donc l'événement « pour tout $m \geqslant 1, X_m \neq 0$ », et on a $P(X_m \neq 0) = p_m$. Donc, par le théorème de limite monotone :

$$P(T=0)=\lim_{n\to+\infty}P(\bigcap_{m=1}^{n}(X_m\neq 0))=\lim_{n\to+\infty}\prod_{m=1}^{n}P(X_m\neq 0)$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\prod_{m=1}^{n}p_m=\lim_{n\to+\infty}\prod_{m=1}^{n}(1-q_m)$$

b) Posons $u_n=\prod_{m=1}^{n}(1-q_m)$. On a $\ln u_n=\sum_{m=1}^{n}\ln(1-q_m)$.

- si la série $\sum q_m$ converge, alors, $\lim_{m\to+\infty}q_m=0$ et $\ln(1-q_m)\sim q_m$.

Ceci implique que la série $\sum\ln(1-q_m)$ converge, donc que $\lim_{n\to+\infty}\ln(u_n)=a$ et
$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\mathrm{e}^a>0.$$

- si $\lim_{n\to+\infty}u_n=\ell>0$, alors $\lim_{n\to+\infty}\ln(u_n)=\ln\ell$.

Ainsi la série $\sum\ln(1-q_m)$ converge, ce qui entrane $\lim_{n\to+\infty}\ln(1-q_m)=0$, donc $\lim_{n\to+\infty}q_m=0$ et $\ln(1-q_m)\sim -q_m$.
Par la règle d'équivalence pour les séries à termes de signe fixe, la série $\sum q_m$ converge.
Ainsi $P(T=0)=0$ si et seulement si $\sum q_m$ diverge.

3. On a $P(T=1)=1-p$ et pour tout $n\geqslant 2, P(T=n)=p^{n-1}(1-p)$. Ainsi $T-1$ suit la loi géométrique de paramètre $1-p$ et par propriété de l'espérance
$$E(T)=E(T-1)+1=1+\frac{1}{1-p}.$$

Exercice 3.7.

On définit une suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de polynômes à coefficients réels par :
$$P_0(X)=1,\quad P_1(X)=X,\ \text{et pour tout } k\geqslant 2\quad P_k(X)=\prod_{i=0}^{k-1}(X-i)$$

1. Montrer que pour tout n entier naturel, il existe $(n+1)$ réels $a_{0,n},a_{1,n},\dots,a_{n,n}$ tels que $X^n=\sum_{k=0}^{n}a_{k,n}P_k(X)$
Ces réels sont-ils déterminés de manière unique ?

2. Soit n un entier naturel, $n\geqslant 1$, et Y une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$ à valeurs dans $\{0,1,\dots,n\}$.
Pour tout réel x strictement positif, on pose $G(x)=E(x^Y)$, où $E(Z)$ représente l'espérance d'une variable aléatoire Z.

a) Montrer que G est de classe C^∞ et que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $G^{(k)}(1))=E(P_k(Y))$, où $G^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième de la fonction G.

b) En déduire que $E(Y^k)=\sum_{i=0}^{k}a_{i,k}G^{(i)}(1)$.

3. On suppose que Y suit une loi binomiale de paramètres n et p. En utilisant uniquement les questions précédentes, calculer $E(Y^2)$ et $E(Y^3)$.

Solution :

1. La famille $(P_n)_{0\leq k\leq n}$ est une famille de $(n+1)$ polynômes de degrés échelonnés ; c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Aussi, existe–t–il $(n+1)$ réels $a_{0,n}, a_{1,n}, \dots, a_{n,n}$ déterminés de manière unique tels que :

$$X^n = \sum_{k=0}^{n} a_{k,n} P_k(X)$$

2. Par le théorème de transfert :

$$G(x) = \sum_{k=0}^{n} P(Y=k)x^k$$

C'est une fonction polynomiale donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. On a :

$$G(1) = \sum_{k=0}^{n} P(Y=k) = 1 = E(P_0(Y))$$

De plus :

$$G'(1) = \sum_{k=0}^{n} kP(Y=k) = E(Y) = E(P_1(Y)),$$

et pour tout $\ell \leqslant n$:

$$G^{(\ell)}(x) = \sum_{j=\ell}^{n} j(j-1)\dots(j-\ell+1)P(Y=j)x^{j-\ell}$$

donc :

$$G^{(\ell)}(1) = \sum_{j=\ell}^{n} j(j-1)\dots(j-\ell+1)P(Y=j) = E(P_\ell(Y))$$

Par linéarité de l'espérance, il vient, pour tout k :

$$E(Y^k) = E\Big(\sum_{j=0}^{n} a_{j,n}P_j(Y)\Big) = \sum_{j=0}^{n} a_{j,n}E(P_j(Y)) = \sum_{j=0}^{n} a_{j,n}G^{(j)}(1)$$

3. Lorsque Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, il vient :
$G(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k} x^k = (px+q)^n$, soit $G'(1) = np$.
De plus :
$X^2 = X(X-1) + X$, d'o : $E(Y^2) = G''(1) + G'(1) = n(n-1)p^2 + np$
Enfin $X^3 = X(X-1)(X-2) + 3X(X-1) + X$, donne :
$E(Y^3) = G'''(1) + 3G''(1) + G'(1) = n(n-1)(n-2)p^3 + 3n(n-1)p^2 + np.$

Exercice 3.8.

On considère deux pièces truquées A et B ; A donne Pile avec la probabilité a $(0 < a < 1)$, et B donne Pile avec la probabilité b $(0 < b < 1)$.

On choisit une pièce au hasard et on la lance ; si l'on obtient Pile, on relance la même pièce, sinon on lance l'autre pièce. On poursuit ce processus k fois ($k \geqslant 2$).

1. Déterminer la probabilité de lancer la pièce A au k-ième lancer.

2. Déterminer la probabilité d'obtenir Pile au k-ième lancer.

3. Déterminer la limite de cette probabilité lorsque k tend vers l'infini. Interpréter le résultat obtenu si l'on suppose maintenant $a = 1$ et $0 < b < 1$.

Solution :

1. Notons les événements :
A_n : « on lance la pièce A au n-ième lancer »,
B_n : « on lance la pièce B au n-ième lancer »,
C_n : « Pile sort au n-ième lancer ».
On peut écrire :

$$P(A_{n+1}) = P(A_{n+1}/A_n)P(A_n) + P(A_{n+1}/B_n)P(B_n).$$

Or si on lance la pièce A au n-ième lancer, la probabilité de la relancer au coup suivant est égale à celle de faire Pile avec cette pièce, soit a. De même, si on lance la pièce B au n-ième lancer, la probabilité de relancer la pièce A au coup suivant est égale à celle de faire Face avec la pièce B, soit $(1 - b)$. Donc :

$$P(A_{n+1}) = aP(A_n) + (1 - b)(1 - P(A_n)) = (a + b - 1)P(A_n) + 1 - b$$

Le point fixe de cette récurrence arithmético-géométrique est $\ell = \dfrac{1 - b}{2 - a - b}$ et classiquement :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, P(A_k) = \ell + (a + b - 1)^{k-1}\big(\tfrac{1}{2} - \ell\big)$$

2. De la même façon, pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} P(C_k) &= P(C_k/A_k)P(A_k) + P(C_k/B_k)P(B_k) \\ &= aP(A_k) + b(1 - P(A_k)) = (a - b)P(A_k) + b \end{aligned}$$

et il suffit de remplacer $P(A_k)$ par sa valeur.

3. Comme $a, b \in]0, 1[$, on a $-1 < a + b - 1 < 1$, donc $\lim\limits_{k\to+\infty} P(A_k) = \ell$ et :

$$\lim_{k\to+\infty} P(C_k) = (a - b)\ell + b = (a - b)\frac{1 - b}{2 - a - b} + b.$$

Ce raisonnement est encore valable lorsque $a = 1$ et $0 < b < 1$ (on a encore $-1 < a + b - 1 < 1$) ; dans ce cas $\ell = 1$ et :

$$\lim_{k\to+\infty} P(C_k) = 1.$$

Ce résultat est logique ; en effet si on lance au départ la pièce A, on obtient Pile puisque $a = 1$, et on la relance. Ainsi tous les lancers s'effectueront avec la pièce A. On est donc certain d'obtenir Pile au k-ième lancer.

Par contre, si on commence avec la pièce B, comme $b < 1$, on finira presque sûrement par changer de pièce. A partir de ce moment on n'obtiendra que des Pile et on ne lancera plus que la pièce A. Donc, asymptotiquement, la probabilité de jouer avec la pièce A et de ne faire que des Pile vaut 1.

Exercice 3.9.

Soit p un réel tel que $0 < p < 1$, et f la fonction définie sur l'intervalle $[0,1]$ par

$$f : x \mapsto px^2 + 1 - p$$

1. Étudier les variations de f sur $[0,1]$.

2. Étudier la suite (u_n) définie par $u_0 = 1 - p$ et pour tout $n \geqslant 0, u_{n+1} = f(u_n)$.

3. On considère une plante qui peut donner naissance à deux descendants avec la probabilité p ou à aucun descendant avec la probabilité $1 - p$. On s'intéresse à sa descendance et on note X_n le nombre de descendants issus de la n-ième génération, *i.e.* le nombre de descendants de la plante à la $(n+1)$-ième génération.

a) Exprimer, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $P(X_n = 0)$ en fonction de u_n.

b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 0)$. Interpréter le résultat trouvé.

Solution :

1. f est dérivable et $f'(x) = 2px$, donc f est strictement croissante sur $[0,1]$, avec $f(0) = 1 - p$ et $f(1) = 1$.

2. $\star$ $f([0,1]) \subset [0,1]$, donc (u_n) est bien définie et à valeurs dans $[0,1]$.
$\star$ La fonction f étant croissante, la suite (u_n) est monotone, et comme :

$$u_1 = p(1-p)^2 + 1 - p = (1-p)(p(1-p)+1) > 1 - p = u_0,$$

la suite (u_n) est croissante et comme elle est bornée elle converge.

$\star$ $f(x) = x \iff px^2 - x + 1 - p = 0 \iff x \in \{1, \dfrac{1-p}{p}\}$, mais la seconde racine $r = \dfrac{1-p}{p}$, qui est positive, appartient à $[0,1]$ si et seulement si $p \geqslant \dfrac{1}{2}$.

Si $p \leqslant \dfrac{1}{2}$, la suite (u_n) est croissante bornée, donc converge vers l'unique point fixe de f, à savoir 1.

Si $p > \dfrac{1}{2}$, alors $u_0 = 1 - p < \dfrac{1-p}{p} = r < 1$. Par croissance de f on en déduit par récurrence : $\forall\, n, u_n < r$ et la suite (u_n) converge vers r.

3. a) $\star$ $p_0 = P(X_0 = 0) = 1 - p$;
Pour $n \in \mathbb{N}$, utilisons le système complet $\big((X_0 = 0), (X_0 = 2)\big)$:

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= P(X_{n+1}=0) \\ &= P(X_0=0)P(X_{n+1}=0/X_0=0)+P(X_0=2)P(X_{n+1}=0/X_0=2) \end{aligned}$$

Or $P(X_{n+1}=0/X_0=0)=1$ (s'il n'y a pas de descendants à la première génération, il n'y en aura pas plus tard) ;

$P(X_{n+1}=0/X_0=2)=[P(X_n=0]^2$, car cela signifie que chacun des deux descendants de première génération n'a pas de descendant de n-ième génération et on conclut par indépendance.

Ainsi $p_{n+1}=(1-p)+p.p_n$ et la suite (p_n) vérifie la même relation de récurrence que la suite (u_n). Comme les termes initiaux sont les mêmes, on conclut :

$$\forall\, n\in\mathbb{N}, P(X_n=0)=u_n$$

b) Par conséquent :

si $p\leqslant \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} P(X_n=0)=1$, et si $p>\frac{1}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} P(X_n=0)=\dfrac{1-p}{p}$

Ceci n'est pas étonnant, car $2p$ est l'espérance du nombre de descendants directs de chaque plante. Ainsi, si $2p<1$, la tendance est à la raréfaction et on s'attend à ce que l'espèce disparaisse, tandis que si $2p>1$, la disparition est possible mais n'est pas quasi-certaine.

Exercice 3.14.

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On pose $Q_0 = 1$, $Q_1 = X$ et pour $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geqslant 2$, $Q_k = X(X-1)\dots(X-k+1)$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de E.

2. On note F l'ensemble des polynômes $P \in E$ tels que $p_n = \dfrac{P(n)}{\mathrm{e}.n!}$ définisse une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ (c'est-à-dire qu'il existe Y telle que $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et $\forall n, P(Y = n) = p_n$). Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $Q_k \in F$.

3. Montrer que F est convexe, c'est-à-dire que si $P_1, P_2 \in F$ et $\lambda \in [0,1]$, alors $\lambda P_1 + (1-\lambda)P_2 \in F$. En déduire que si $P \in E$ a pour degré p et si $P = \sum\limits_{k=0}^{p} \alpha_k Q_k$ avec $\alpha_k \in [0,1]$ et $\sum\limits_{k=0}^{p} \alpha_k = 1$, alors $P \in F$.

4. Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{p} \alpha_k Q_k \in F$ avec $\alpha_k \in [0,1]$ et $\sum\limits_{k=0}^{p} \alpha_k = 1$ et soit Y une variable aléatoire suivant la loi de probabilité associée.
Écrire XQ_k dans la base $\mathcal{B}$. En déduire l'espérance de Y en fonction des α_k.

Solution :

1. La famille $\mathcal{B}$ est graduée en degrés, donc est une base de $\mathbb{R}[X]$.

2. Soit $k \in \mathbb{N}$, $Q_k(n)$ n'est non nul que pour $n \geqslant k$ et est alors positif. La convergence étant évidente, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_k(n)}{\mathrm{e}.n!} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{Q_k(n)}{\mathrm{e}.n!} = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{(n-k)!} = \frac{1}{\mathrm{e}}\,\mathrm{e} = 1$$

Donc $Q_k \in F$.

3. Si P_1 et P_2 sont dans F, alors pour tout $\lambda \in [0,1]$, $\lambda P_1 + (1-\lambda)P_2$ est à valeurs positives ou nulles sur $\mathbb{N}$ et, toutes les convergences étant encore évidentes, on peut « casser » la sommation :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\lambda P_1 + (1-\lambda)P_2](n)}{\mathrm{e}.n!} = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_1(n)}{\mathrm{e}.n!} + (1-\lambda) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_2(n)}{\mathrm{e}.n!} = \lambda + (1-\lambda) = 1$$

Donc $\lambda P_1 + (1-\lambda)P_2 \in F$.

De la même façon, si $P_1, \ldots, P_n$ appartiennent à F et si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des réels positifs de somme 1, alors $\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n \in F$.

Comme $Q_0, \ldots, Q_p$ appartiennent à F, on a la conclusion voulue.

4. On a $XQ_k = Q_{k+1} + kQ_k$. Si on note Z_k une variable aléatoire suivant la loi associée à Q_k, on a :

$$E(Z_k) = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{Q_k(n)}{\mathrm{e}.n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_{k+1}(n)}{\mathrm{e}.n!} + k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_k(n)}{\mathrm{e}.n!} = 1 + k$$

Par linéarité de l'espérance, on conclut :

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (1+k) = 1 + \sum_{k=0}^{n} k\alpha_k$$

Exercice 3.22.

Paul possède un sac qui contient au début 3 billes ordinaires et 1 bille en agate. Il joue avec son copain Luc de la façon suivante : à chaque étape, Luc ajoute 3 billes ordinaires dans le sac, puis il tire de façon équiprobable une bille du sac et la garde. Le jeu s'arrête dès que Luc tire la bille en agate.

On note X le nombre d'étapes du jeu ; avec la convention $X = 0$ si Luc ne tire jamais la bille en agate.

1. Soit n un entier naturel. Vérifier que $\dfrac{n}{n+1} \leqslant \dfrac{n+1}{n+2}$.

2. En majorant la probabilité de l'événement « la bille en agate n'a pas encore été tirée à l'étape n », montrer que $P(X = 0) = 0$.

3. Déterminer la loi de X.

4. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

Solution :

1. Question évidente.

2. Pour tout $n \geqslant 1$, notons G_n l'événement « Luc ne tire pas la bille en agate à l'étape n ». Il vient, pour tout n :

$$P(G_1 \cap G_2 \cap \cdots \cap G_n) = P(G_1)P(G_2/G_1)\ldots P(G_n/(G_1 \cap \cdots \cap G_{n-1}))$$
$$= \frac{6}{7} \times \frac{8}{9} \times \ldots \times \frac{2n+4}{2n+5}$$

En utilisant le résultat de la question précédente, écrivons :

$$[P(G_1 \cap G_2 \cap \cdots \cap G_n)]^2 \leqslant \frac{6}{7} \times \frac{7}{8} \times \frac{8}{9} \times \frac{9}{10} \times \ldots \times \frac{2n+4}{2n+5} \times \frac{2n+5}{2n+6}$$

Soit, par télescopage : $[P(G_1 \cap G_2 \cap \cdots \cap G_n)]^2 \leqslant \dfrac{6}{2n+6}$ et donc :

$$\lim_{n\to\infty} P(G_1 \cap G_2 \cap \cdots \cap G_n) = 0$$

Et, par le théorème de limite monotone :

$$P(X = 0) = \lim_{n\to\infty} P(G_1 \cap G_2 \cap \cdots \cap G_n) = 0$$

Variante : on peut aussi prouver ce résultat de façon directe. En effet :

$$-\ln\big(P(G_1 \cap G_2 \cap \cdots \cap G_n)\big) = \sum_{k=1}^{n} \ln\big(\frac{2k+5}{2k+4}\big) = \sum_{k=1}^{n} \ln\big(1 + \frac{1}{2k+4}\big).$$

Comme $\ln\big(1 + \frac{1}{2k+4}\big) \sim \frac{1}{2k+4}$, la divergence de la série de terme général $\frac{1}{2k+4}$ donne la divergence de la série de terme général $\ln\big(\frac{2k+5}{2k+4}\big)$.

Cette série étant à termes positifs, on a donc $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\big(\frac{2k+5}{2k+4}\big) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to\infty} P(G_1 \cap G_2 \cap \cdots \cap G_n) = 0$.

3. On a $P(X=1)=1/7$. Pour tout $n \geqslant 2$, on a :
$u_n = P(X=n) = P(G_1 \cap G_2 \cap \ldots \cap G_{n-1} \cap \overline{G_n})$
$= P(G_1)\ldots P(G_{n-1}/(G_1 \cap G_2 \cap \ldots \cap G_{n-2})) \times P(\overline{G_n}/G_1 \cap G_2 \cap \ldots \cap G_{n-1}))$
Soit :

$$P(X=n) = \frac{6}{7} \times \frac{8}{9} \times \ldots \times \frac{2n+2}{2n+3} \times \frac{1}{2n+5}$$

4. On a :
$P(X=n) \geqslant \frac{6}{7} \times \frac{7}{8} \times \frac{8}{9} \times \frac{9}{10} \times \ldots \times \frac{2n+2}{2n+3} \times \frac{2n+3}{2n+4} \times \frac{1}{2n+5}$
Soit, encore par télescopage : $P(X=n) \geqslant \dfrac{6}{(2n+4)(2n+5)}$.

Ainsi $nP(X=n) \geqslant \dfrac{3n}{(n+2)(2n+5)}$, qui est le terme général d'une série divergente (car équivalent à $\dfrac{3}{2n}$) . Donc X n'admet pas d'espérance.

Exercice 3.23.

Deux joueurs jouent à pile ou face avec une pièce identique non truquée, et lancent alternativement leur pièce. On définit une variable aléatoire X_1 (respectivement X_2) comme le numéro du jet à l'issue duquel le premier (respectivement le deuxième) joueur obtient pile pour la première fois (les jets sont comptés indépendamment pour chacun des joueurs).
La variable aléatoire X est le numéro du jet à l'issue duquel un des deux joueurs obtient pile pour la première fois.
La variable aléatoire J vaut 1 (respectivement 2) si le premier (respectivement le deuxième) joueur obtient pile en premier, et vaut 0 si les deux joueurs obtiennent pile en un même nombre de coups.
On cherche à montrer que conditionnellement au fait qu'ils n'obtiennent pas pile en un même nombre de coups, les variables aléatoires X et J sont indépendantes. Autrement dit, si on nomme H l'événement $(X_1 \neq X_2)$, on cherche à montrer que, pour $j = 0, 1, 2$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$P([(J=j) \cap (X>k)]/H) = P(J=j/H) \cdot P(X>k/H)$$

1. Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X_1 > k)$. Calculer $P(X_1 < X_2)$ et en déduire $P(H)$.

2. Démontrer que la loi de X_1 conditionnelle à l'événement $X_1 < X_2$ est une loi géométrique de paramètre $3/4$. En déduire pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X_1 > k/X_1 < X_2)$.

3. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P(H \cap (J=1) \cap X > k) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^k$$

4. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P([(J=1) \cap (X>k)]/H) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}$$

5. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P(X > k/H) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \text{ et que } P(J = 1/H) = P(J = 2/H) = \frac{1}{2}$$

6. Conclure.

Solution :

1. Les variables aléatoires X_1 et X_2 correspondent à des temps d'attente d'un premier succès au cours d'une répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre $1/2$. On en déduit que X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent la loi géométrique de paramètre $1/2$. On a :

$$P(X_1 > k) = \sum_{i=k+1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^i = \left(\tfrac{1}{2}\right)^k.$$

(On peut aussi considérer l'événement complémentaire qui est : «les k premiers essais sont des échecs».)

La famille $(X_1 = k)_{k \geqslant 1}$ est un système complet d'événements. Ainsi, par indépendance des variables aléatoires X_1 et X_2, on a :

$$\begin{aligned} P(X_1 < X_2) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(X_1 = k) P(X_2 > k) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}\right)^{k-1}\left(\tfrac{1}{2}\right)^k \\ &= 4 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{4}\right)^{k-1} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Les variables X_1 et X_2 étant indépendantes et de même loi ; on en déduit par symétrie que $P(X_1 > X_2) = \dfrac{1}{3}$ et que $P(H) = 2P(X_1 < X_2) = \dfrac{2}{3}$.

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X_1 = k/X_1 < X_2) = \dfrac{P((X_1 = k) \cap (X_2 > k))}{P(X_1 < X_2)}$.

Par indépendance :

$$P(X_1 = k/X_1 < X_2) = \frac{P(X_1 = k)P(X_2 > k))}{P(X_1 < X_2)} = \frac{(1/2)^{2k}}{1/3} = \left(\tfrac{3}{4}\right)\left(\tfrac{1}{4}\right)^{k-1},$$

ce qui montre que la loi de X_1 conditionnelle à l'événement $(X_1 < X_2)$ est la loi géométrique de paramètre $3/4$. Enfin :

$$P(X_1 > k/X_1 < X_2) = \sum_{j=k+1}^{\infty} \left(\tfrac{3}{4}\right)\left(\tfrac{1}{4}\right)^{j-1} = \left(\tfrac{1}{4}\right)^k$$

3. Puisque $(J = 1) \subset H$, et que sur l'ensemble $(J = 1)$ on a $X = X_1$, il vient l'égalité des ensembles $H \cap (J = 1) \cap (X > k) = (X_1 > k) \cap (X_1 < X_2)$ et :

$$P(H \cap (J = 1) \cap (X > k)) = P(X_1 > k/X_1 < X_2)P(X_1 < X_2) = \left(\tfrac{1}{3}\right)\left(\tfrac{1}{4}\right)^k$$

4. D'après la question précédente :

$$P_H\big((J = 1) \cap (X > k)\big) = \frac{P(H \cap (J = 1) \cap (X > k))}{P(H)} = \left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}\right)^{2k}$$

5. On a l'égalité d'ensembles $H \cap (J=2) \cap (X>k) = (X_2 > k) \cap (X_2 < X_1)$ et en suivant un raisonnement identique à celui développé plus haut et par symétrie :

$$P(H \cap (J=2) \cap (X>k)) = P(H \cap (J=1) \cap (X>k)) = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^k$$

On remarque enfin que $H \cap (J=0) = \emptyset$ donc

$$\begin{aligned} P_H(X>k) &= P_H\big((J=1) \cap (X>k)\big) + P_H\big((J=2) \cap (X>k)\big) \\ &= 2P_H\big((J=1) \cap (X>k)\big) = \left(\frac{1}{4}\right)^k. \end{aligned}$$

6. En conclusion :

$$P_H(J=1) = \frac{P\big(H \cap (J=1)\big)}{P(H)} = \frac{P(X_1 < X_2)}{P(H)} = \frac{1}{2}$$

et puisque $P_H(J=0) = 0$ on en déduit que $P_H(J=2) = \frac{1}{2}$.

On considère les lancers successifs (indépendants) d'une pièce non pipée et on note T le nombre de Face précédant le premier Pile. On propose à un joueur la suite de paris suivante :

• Pari P_0 : si $T=0$, on perd 1 Euro ; si $T=1$, on gagne 3 Euros ; sinon on ne gagne ni ne perd rien ;
• Pari P_1 : si $T=1$, on perd 4 Euros ; si $T=2$, on gagne 9 Euros ; sinon, on ne gagne ni ne perd rien ;
• Pari P_2 : si $T=2$, on perd 10 Euros ; si $T=3$, on gagne 27 Euros ; sinon, on ne gagne ni ne perd rien ;

...

• Pari P_n : si $T=n$, on perd 3^n+1 Euros ; si $T=n+1$, on gagne 3^{n+1} Euros ; sinon, on ne gagne ni ne perd rien ;

etc.

1. Chaque pari est-il favorable au joueur ?
2. Calculer l'espérance du gain Γ si le joueur parie sur la suite de tous les résultats.

Solution :

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(T=k)=\dfrac{1}{2^{k+1}}$ (on a k fois de suite Face, puis Pile)
Supposons que le joueur joue sur le pari P_n et soit G_n le gain du joueur.
$\star$ $G_0(\Omega)=\{-1,0,3\}$ et :

$$P(G_0=-1)=P(T=0)=\frac{1}{2},\ P(G_0=3)=P(T>1)=\frac{1}{4}$$

Donc $E(G_0)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{4}$.
$\star$ Pour $n \geqslant 1$, $G_n(\Omega)=\{-(3^n+1),0,3^{n+1}\}$ et :

$$P(G_n=-3^n-1)=P(T=n)=\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$P(G_n=3^{n+1})=P(T=n+1)=\frac{1}{2^{n+2}}$$

Donc $E(G_n)=-(3^n+1)\dfrac{1}{2^{n+1}}+3^{n+1}\dfrac{1}{2^{n+2}}=\dfrac{3^n-2}{2^{n+2}}$.
Ainsi, dans tous les cas $E(G_n)>0$ et chaque pari est favorable au joueur.

2. Supposons que le joueur joue sur l'ensemble de tous les paris. Alors :
Si $(T=0)$ est réalisé, le joueur perd 1 euro sur le pari P_0 et ne perd ni ne gagne rien sur les autres paris, et ceci se réalise avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$;
Si $(T=1)$ est réalisé, alors P_0 est gagné (il gagne 3 euros) et P_1 est perdu (il perd 4 euros) et rien n'est gagné ni perdu sur les autres paris ; le joueur perd au total 1 euro et ceci se réalise avec la probabilité $\dfrac{1}{4}$;
Si $(T=2)$ est réalisé, alors le joueur gagne le pari P_1 et perd le pari P_2 (il ne gagne ni ne perd rien sur P_0 et sur les paris postérieurs) ; le joueur

gagne 9 euros et en perd 10, au total il perd 1 euro et ceci se produit avec la probabilité $\frac{1}{8}$;

...

Plus généralement si $(T = n)$ est réalisé, le joueur gagne le pari P_{n-1} et perd le pari P_n (sur les paris antérieurs ou postérieurs il ne gagne ni ne perd rien). Au total il perd 1 euro et ceci se produit avec la probabilité $\frac{1}{2^{n+1}}$

...

Finalement le joueur perd 1 euro avec la probabilité $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$, soit :

$$E(\Gamma) = -1$$

Ce résultat qui peut paratre paradoxal est dû au fait que pour $n \geqslant 1$, on a : $E(G_n) = -(3^n + 1)\frac{1}{2^{n+1}} + 3^{n+1}\frac{1}{2^{n+2}}$ et que dans la somme $\sum_{n=1}^{\infty} E(G_n)$, il n'est pas possible de calculer séparément la somme des pertes et la somme des gains, pour distinguer les paris perdus et les paris gagnés ...

Exercice 3.33.

On admettra, sans démonstration, la formule :

$$\forall x \in [0,1[, \forall r \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{C}_{r+k}^{r} x^k = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$$

On dispose d'une urne contenant une proportion p de boules rouges et $q = 1 - p$ de boules vertes $(0 < p < 1)$. On effectue dans cette urne des tirages successifs d'une boule avec remise et on note, pour $r \in \mathbb{N}^*$, X_r la variable aléatoire définie par :

$X_r = k$ si k est le nombre de boules vertes tirées avant l'apparition de la $r^{\text{ème}}$ème boule rouge et $X_r = -1$ si l'on obtient jamais r boules rouges.

On dit que X_r suit la loi $J(r,p)$.

1. Donner la loi de X_1 et son espérance.

2. a) Donner, pour $k \in \mathbb{N}$, l'expression de $P(X_r = k)$.

b) Que vaut $P(X_r = -1)$?

c) Calculer $E(X_r)$.

3. On considère une suite $(X_n)_{n \geqslant 1}$ de variables indépendantes telles que, pour tout n, X_n suit la loi $J(n, p_n)$ où $\lim\limits_{n\to\infty} n(1-p_n) = \lambda$, avec $\lambda > 0$.

Montrer que (X_n) converge en loi vers une variable X dont on déterminera la loi.

4. On suppose dans cette question que X suit la loi $J(2,p)$.

a) Montrer que $\forall x \in [0,1[, \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$

(on remarquera que $\dfrac{x^k}{k} = \displaystyle\int_0^x t^{k-1}\,dt$).

b) Calculer $E\left(\dfrac{1}{X+2}\right)$.

Solution :

1. $X_1 + 1$ suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, d'o $E(X_1) = \dfrac{1}{p} - 1 = \dfrac{q}{p}$.

2. a) Pour $k \in \mathbb{N}$, l'événement $(X_n = k)$ est réalisé si et seulement si les $k+n-1$ premiers tirages amènent $n-1$ boules rouges, le tirage de rang $k+n$ amenant la n-ième boule rouge. Les tirages ayant lieu avec remise, il vient :

$$P(X_n = k) = \mathrm{C}_{k+n-1}^{n-1} q^k p^{n-1} p = \mathrm{C}_{k+n-1}^{n-1} q^k p^n$$

b) Par la formule admise :

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(X_n = k) = p^n \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{C}_{k+n-1}^{n-1} q^k = p^n \frac{1}{(1-q)^n} = 1$$

D'o $P(X_n = -1) = 0$.

c) Soit Y_k le nombre de boules vertes obtenues entre les $(k-1)$-ième et k-ième boules rouges obtenues (on pose $Y_1 = X_1$). Par indépendance, chaque Y_k suit la même loi que $Y_1 = X_1$, d'espérance $\dfrac{q}{p}$.
Comme $X_r = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_r$, par linéarité de l'espérance, il vient :

$$E(X_r) = \frac{rq}{p}$$

3. Pour $k \in \mathbb{N}$, $P(X_n = k) = \mathrm{C}_{k+n-1}^{n-1}(1-p_n)^k p_n^n$.

$\star$ $\ln(p_n^n) = n\ln(p_n) \underset{(n\to\infty)}{\sim} n(p_n - 1) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\lambda$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} p_n^n = \mathrm{e}^{-\lambda}$.

$\star$ $\mathrm{C}_{k+n-1}^{n-1} = \dfrac{(k+n-1)(k+n-2)\dots n}{k!} \underset{(n\to\infty)}{\sim} \dfrac{n^k}{k!}$, donc :

$$\mathrm{C}_{k+n-1}^{n-1}(1-p_n)^k \sim \frac{[n(1-p_n)]^k}{k!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Ainsi, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} P(X_n = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$, ce qui signifie que la suite (X_n) converge en loi vers une variable suivant la loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

4. a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \int_0^x t^{k-1} dt = \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}\, dt = \int_0^x \frac{1}{1-t}\, dt - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\, dt$, soit :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - R_n(x), \text{ avec } 0 \leqslant R_n(x) \leqslant \int_0^x \frac{x^n}{1-x}\, dt = \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

On a donc $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, c'est-à-dire :

$$\forall\, x \in [0,1[,\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$$

b) $\dfrac{1}{X+2}$ est une variable bornée, donc admet une espérance, et :

$$\begin{aligned}
E\Big(\frac{1}{X+2}\Big) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+2} P(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+2}(k+1) q^k p^2 \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} q^k p^2 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+2} q^k p^2 = p^2 \frac{1}{1-q} - \frac{p^2}{q^2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{q^k}{k} \\
&= p - \frac{p^2}{q^2}\big(-\ln(1-q) - q\big)
\end{aligned}$$

Soit, après simplifications :

$$E\Big(\frac{1}{X+2}\Big) = \frac{p}{q} + \frac{p^2}{q^2}\ln p$$

Exercice 3.34.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient $2n$ boules indiscernables au toucher : deux boules portent le numéro 1, deux boules portent le numéro 2, …, deux boules portent le numéro n.

On effectue une succession de tirages de deux boules de cette urne selon le protocole suivant : si les deux boules obtenues portent des numéros différents, elles sont remises dans l'urne avant le tirage suivant, si les deux boules portent le même numéro, elles sont définitivement éliminées.

On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour vider complètement l'urne.
On note Y_1 la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir une première paire de boules portant le même numéro et pour $i \in [\![2, n]\!]$, on note Y_i la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir une $i^{\text{ème}}$ paire de boules portant le même numéro, **à partir du retrait** d'une $(i-1)^{\text{ème}}$ paire de boules.

1. a) Quelle relation lie X_n à $Y_1, \dots, Y_n$?

b) Déterminer la loi de Y_1. Plus généralement, déterminer pour $i \in [\![1, n]\!]$, la loi de Y_i. Quelle est son espérance ?

c) En déduire que $E(X_n) = n^2$.

2. a) Dans les cas $n = 1$, puis $n = 2$, déterminer la loi de X_n.

b) On suppose $n = 3$. Montrer que :

$$\forall\, k \geqslant 3, P(X_3 = k) = \frac{1}{2}\Big[\big(\frac{4}{5}\big)^{k-2} - \big(\frac{2}{3}\big)^{k-2}\Big]$$

3. On revient au cas général.

a) Montrer que $P(X_n = n) = \dfrac{2^n n!}{(2n)!} \mp$

b) Exprimer $P(X_n = n+1)$ à l'aide de termes de la suite (h_k) définie, pour $k \geqslant 1$, par $h_k = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{k} \mp$

Solution :

1. a) Clairement : $X_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$.

b) Pour $i \in [\![1, n]\!]$, si $(i-1)$ paires ont déjà été retirées, il reste $2(n-i+1)$ boules dans l'urne et le tirage d'une paire est de probabilité :

$$p_i = \frac{n-i+1}{\mathrm{C}^2_{2(n-i+1)}} = \frac{1}{2(n-i)+1}$$

Ainsi Y_i suit la loi géométrique de paramètre p_i et $E(Y_i) = \dfrac{1}{p_i} = 2(n-i)+1$.

c) Par linéarité de l'espérance :

$E(X_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} E(Y_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} [2(n-i)+1] = \sum\limits_{k=0}^{n-1} (2k+1)$

Soit :

$$E(X_n) = n(n-1) + n = n^2$$

2. a) $\star$ Pour $n = 1$, X_1 est la constante égale à 1.

$\star$ Pour $n = 2$, on attend une première paire (loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$) puis on conclut au tirage suivant :

$$X_2(\Omega) = [\![2, +\infty[\![, \forall k \geqslant 2, P(X_2 = k) = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} \frac{1}{3}$$

b) Pour $n = 3$, $X_3 = Y_1 + Y_2 + 1$, o $Y_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(\frac{1}{5})$ et $Y_2 \hookrightarrow \mathcal{G}(\frac{1}{3})$, Y_1 et Y_2 étant indépendantes. Donc, par convolution discrète :

$$\forall k \geqslant 3, P(X_3 = k) = \sum_{i=0}^{n-3} \left(\frac{4}{5}\right)^i \left(\frac{1}{5}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^{k-3-i} \left(\frac{1}{3}\right)$$

Soit, par la relation $x^n - y^n = (x-y) \sum\limits_{i=0}^{n-1} x^i y^{n-1-i}$:

$$P(X_3 = k) = \frac{1}{15} \frac{(\frac{4}{5})^{k-2} - (\frac{2}{3})^{k-2}}{\frac{4}{5} - \frac{2}{3}} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{k-2} - \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}\right)$$

3. a) Pour réaliser $(X_n = n)$, il faut gagner à chaque essai, *i.e.* réaliser $(Y_1 = 1)$, $(Y_2 = 1)$, $\ldots$,$(Y_n = 1)$. On obtient donc par indépendance :

$$P(X_n = n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2(n-i)+1} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} (2k)}{\prod\limits_{k=1}^{2n} k} = \frac{2^n n!}{(2n)!}$$

b) De même pour réaliser $(X_n = n+1)$, il faut obtenir une paire à chaque essai, sauf une fois (pas la dernière) o l'on doit s'y prendre à deux fois ! En clair :

$(X_n = n+1) = \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} \left((Y_i = 2) \bigcap\limits_{\substack{j=1 \\ ji}}^{n-1} (Y_j = 1)\right)$

Avec les notations de la question 1., $P(Y_i = 1) = p_i$ et $P(Y_i = 2) = (1-p_i)p_i$, d'o par disjonction, puis indépendance :

$$\begin{aligned} P(X_n = n+1) &= p_1 p_2 \ldots p_{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} (1-p_j) = \frac{2^n n!}{(2n)!}\Big(n - 1 - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2j+1}\Big) \\ &= \frac{2^n n!}{(2n)!}\Big(n - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2j+1}\Big) \end{aligned}$$

Or $\sum\limits_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2j+1} = \sum\limits_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}$, soit finalement :

$$P(X_n = n+1) = \frac{2^n n!}{(2n)!}\left(n - h_{2n} + \frac{1}{2} h_n\right)$$