# Révisions 6 : Probabilités

**I — Le B.A.BA**

**1) Définitions théorèmes :**

Liste non exhaustive des éléments du cours à maîtriser :

— Famille dénombrable, non dénombrable. Famille dénombrable sommable. Cas des familles "doubles" $(a_{i,j})_{i\in\mathbb{N},j\in\mathbb{N}}$.
— Sommation par paquets pour les familles sommables (permet le calcul des espérances ou variances de variables aléatoires)
— Permutation des termes pour les familles sommables (permet le calcul des probabilités)
— Langage des probabilités : événement, événement élémentaire, conjonction (intersection), disjonction (union), négation (complémentaire), tribu, espace probabilisable, espace probabilisé.
— Tribu engendrée par une partie.
— Fonction probabilité, propriétés. 3 exemples génériques (pile ou face fini, temps d'arrêt, pile ou face infini)
— Description des fonctions probabilités sur un ensemble au plus dénombrable.
— Indépendance. Définition. Exemple et contre-exemple.
— Probabilité conditionnelle.Formule des probabilités composées
— Indépendance et conjonction (intersection).
— Formule des probas totales et Formule de Bayes.
— Variables aléatoires. Variable aléatoire discrète.
— Loi de probabilité de $X$ VAR. Composition.
— Couple de VAR. Loi conjointe, lois marginales. Exemples.
— Loi conditionnelle de $X$ selon $Y = a$.
— Moments. Espérance, Variance. Loi centrée. Loi réduite.
— Formule de Transfert.
— Propriétés de l'espérance. Propriétés de la variance.
— Inégalités de Markov, de Bienaymé-Tchebychev, de Cauchy-Schwarz.
— Loi des grands nombres.
— Covariance. Indépendance et covariance.
— Fonction génératrice. Domaine de définition, série entière. Dérivées successives en 1 et moments de $X$.
— Indépendance et fonction génératrice d'une somme $X + Y$.
— Lois usuelles. (univers image, loi de probabilité, espérance, variance, fonction génératrice)

**II — Interrogations de cours quotidiennes :**

## Série 1 :

1. Rappeler la définition d'une tribu $\mathcal{T}$. Comment appelle-t-on un élément de $\mathcal{T}$ ?
2. Rappeler la définition d'une fonction probabilité et les trois modèles standards d'espaces probabilisés (pile ou face fini, temps d'attente du premier succés et pile ou face infini)
   On donnera à chaque fois l'univers, la tribu et la fonction probabilité sur un ensemble qui engendre la tribu.
3. Rappeler le théorème de la limite monotone pour une fonction probabilité.
4. Citer avec toutes les hypothèses, la formule des probabilités totales.
5. Lorsque $I$ est une partie de $\mathbb{N}$, comment vérifier que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable ?
6. Donner la loi, l'espérance, la variance et la fonction génératrice de $X$ qui suit une loi géométrique de paramètre $p \in ]0, 1[$.
7. Déterminer la loi de $X+Y$ lorsque $X$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda$ et $Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\mu$ et $X, Y$ indépendantes. En déduire $\mathbb{E}(X + Y)$ et $\mathbb{V}(X + Y)$

## Série 2

1. Citer la définition puis les propriétés d'une fonction probabilités.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur le réel $\lambda$ pour que l'on définisse une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ en posant $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(\{n\}) = \dfrac{\lambda}{2^n}$.
On choisit alors un entier au hasard. Quelle est la probabilité qu'il soit pair ? Qu'il soit supérieur à un entier $N$ donné ?
3. Rappeler la définition d'une famille $(A_i)_{i\in I}$ d'événements mutuellement indépendants.
4. Citer la formule des probabilités composées en précisant ses hypothèses.
5. Citer la formule des probabilités totales et la formule de Bayes en précisant les hypothèses.

## Série 3

1. Si les évènements $(A_i)_{i\in I}$ sont mutuellement indépendants alors que vaut $\mathbb{P}(\bigcap_i A_i)$ ?
2. Si les évènements $(A_i)_{i\in I}$ sont 2 à 2 incompatibles (disjoints) alors que vaut $\mathbb{P}(\cup_i A_i)$ ?
3. Citer le théorème de la loi des grands nombres. Comment le démontre-t-on ?
4. Soit $X_1$ et $X_2$ deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On suppose que $X_1$ et $X_2$ sont indépendantes et suivent une loi de Poisson, de paramètres respectifs $\lambda_1$ et $\lambda_2$.
Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.
5. Déterminer la fonction génératrice d'une v.a.r $X$ qui suit une loi géométrique.
6. Compléter les formules des lois marginales pour un couple de variables aléatoires :
$\mathbb{P}(X = x) =$
$\mathbb{P}(Y = y) =$
$\mathbb{P}(X + Y = z) =$

## Série 4

1. Soient $X, Y$ indépendantes de lois $\mathcal{G}(p)$ et $\mathcal{G}(p')$. Montrer que $\mathbb{P}(X > n) = (1-p)^n$. En déduire que $\min(X, Y) \sim \mathcal{G}(p + p' - pp')$.
2. Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi du couple $(X, Y)$ est donnée par :
$\forall\,(i,j) \in \mathbb{N}^2,\ P((X = i) \cap (Y = j)) = \dfrac{1}{\mathrm{e}\, 2^{i+1} j!}$ Déterminer les lois de $X$ et de $Y$.
3. Donner la définition du polynôme minimal d'une matrice $M$.
4. Donner la définition du polynôme caractéristique d'une matrice carrée.
5. Citer la formule des sommes de Riemann. Quelle est la limite de $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{k}{\sqrt{4n^2 - k^2}}$ ?
6. Citer le théorème de convergence dominée.
7. Quelles sont les intégrales convergentes ?
a $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$
b $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t}}$
c $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{dt}{t^{3/2}}$
d $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt[3]{t-1}}$

## Série 5

1. soient $X_1, X_2$ indépendantes de lois $\mathcal{B}(m,p)$ et $\mathcal{B}(n,p)$. Alors $X_1 + X_2 \sim \mathcal{B}(m+n,p)$.
2. Citer la définition puis les propriétés de la variance d'une v.a.r. et de la covariance de 2 v.a.r.
3. Citer l'inégalité de Markov. La démontrer.
4. Rappeler les formules de changement de bases.
5. Justifier que toute matrice de $\mathcal{M}_{2k+1}(\mathbb{R})$ admet au moins une valeur propre réelle.
6. Développement limité en 0 à l'ordre $n$ de $(1+x)^\alpha$
7. Citer le théorème de comparaison séries/intégrales. En déduire que la série de Bertrand de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.
8. Citer le théorème de permutation série/intégrale de Beppo-Levi

**III — Interrogations : corrections.**

## Série 1 :

1. Rappeler la définition d'une tribu $\mathcal{T}$. Comment appelle-t-on un élément de $\mathcal{T}$ ?

   *Une tribu est une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$ qui est stable par complémentaire et union dénombrable et contient au moins l'ensemble $\Omega$.*

   *Un élément de $\mathcal{T}$ est appelé* **événement**.

2. Rappeler la définition d'une fonction probabilité et les trois modèles standards d'espaces probabilisés (pile ou face fini, temps d'attente du premier succés et pile ou face infini)

   On donnera à chaque fois l'univers, la tribu et la fonction probabilité sur un ensemble qui engendre la tribu.

   *Une* probabilité *est une application $\mathbb{P} : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ (en réalité $[0,1]$) telle que :*
   — $\forall A \in \mathcal{T}, \mathbb{P}(A) \geqslant 0$,
   — $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
   — *Pour toute* famille au plus dénombrable $(A_n)$ *d'évènements deux à deux incompatibles,*

   $$\mathbb{P}(\bigsqcup_n A_n) = \sum_n \mathbb{P}(A_n).$$

   <u>*Jeu de pile ou face fini :*</u> $\Omega = \{P,F\}^n$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2^n}\,\mathrm{Card}(A)$.
   <u>*Attente du premier succès :*</u> $\Omega = \{P, FP, FFP, \ldots\} \cup \{FFF\ldots\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(F^kP) = \frac{1}{2^{k+1}}$, $\mathbb{P}(F^\infty) = 0$, $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in A}\mathbb{P}(\omega)$.
   <u>*Jeu de pile ou face infini :*</u> $\Omega = \{P,F\}^{\mathbb{N}}$, *$\mathcal{T}$ = la tribu engendrée par les ensembles de la forme $A_n \times \Omega$ avec $A_n \subset \{P,F\}^n$, $\mathbb{P}$ = l'unique probabilité sur $\mathcal{T}$ pour laquelle $\mathbb{P}(A_n \times \Omega) = \frac{1}{2^n}\,\mathrm{Card}(A_n)$. L'existence et l'unicité de $\mathbb{P}$ sont admises.*

3. Rappeler le théorème de la limite monotone pour une fonction probabilité.

   *Si $(A_n)$ est une suite d'évènements* **croissante pour l'inclusion** *alors $\mathbb{P}(\bigcup_n A_n) = \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(A_n)$.*

4. Citer avec toutes les hypothèses, la formule des probabilités totales.

   **Formule des probabilités totales :** *si $\Omega = \bigsqcup_n A_n$ (on dit que la famille $(A_n)$ est un système complet d'événements) et $\forall\, n$, $\mathbb{P}(A_n) > 0$ :*

   $$\mathbb{P}(B) = \sum_n \mathbb{P}_{A_n}(B)\mathbb{P}(A_n)$$

5. Lorsque $I$ est une partie de $\mathbb{N}$, comment vérifier que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable ?

   *Lorsque $I$ est une partie de $\mathbb{N}$, comment une famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable ssi $\sum_i |x_i|$ est une série convergente, c'est à dire, quitte à poser $x_i = 0$ si $i \notin I$, la suite des sommes partielles $U_n = \sum_{i=0}^n |x_i|$ est une suite convergente.*

6. Donner la loi, l'espérance, la variance et la fonction génératrice de $X$ qui suit une loi géométrique de paramètre $p \in ]0,1[$.
*$\mathcal{G}(p) \sim T = \inf\{k \in \mathbb{N}^*$ tel que $X_k = 1\}$ ($= \infty$ si $\forall k$, $X_k(\omega) = 0$) où $(X_1, X_2, \dots)$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi $\mathcal{B}(p)$, $p \in ]0,1[$.*
*$T(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. $\mathbb{P}(T = k) = q^{k-1}p$ si $k \geqslant 1$, $\mathbb{P}(t = 0) = \mathbb{P}(T = \infty) = 0$, $\mathbb{P}(T > k) = q^k$.*
*$\mathbb{E}(X) = 1/p$, $\mathbb{V}(X) = q/p^2$, $G_X(t) = pt/(1 - qt)$.*

7. Déterminer la loi de $X + Y$ lorsque $X$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda$ et $Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\mu$ et $X, Y$ indépendantes. En déduire $\mathbb{E}(X + Y)$ et $\mathbb{V}(X + Y)$
*La loi de* POISSON *de paramètre $\lambda$ est la loi de probabilité sur $\mathbb{N}$ définie par la formule $\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$.*
*Elle est notée $\mathcal{P}(\lambda)$. Alors $\mathbb{E}(X) = \lambda$, $\mathbb{V}(X) = \lambda$, $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$.*
*Donc $G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t) = e^{(\lambda+\mu)(t-1)}$ car $X, Y$ sont indépendantes.*
*Comme la fonction génératrice caractérise une loi, $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.*
*Et $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{V}(X + Y) = \lambda + \mu$*

# Série 2

1. Citer la définition puis les propriétés d'une fonction probabilités.
*Une* probabilité *est une application $\mathbb{P} : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ (en réalité $[0,1]$) telle que :*
— $\forall A \in \mathcal{T}, \mathbb{P}(A) \geqslant 0$,
— $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
— *Pour toute* famille au plus dénombrable $(A_n)$ *d'évènements deux à deux incompatibles,*

$$\mathbb{P}(\bigsqcup_n A_n) = \sum_n \mathbb{P}(A_n).$$

(1) : $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
(2) : $\mathbb{P}(\Omega \setminus A) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
(3) : *Si $A \subset B$ alors $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$*
*et $\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B \setminus A)$.*
(4) : $\mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
(5) : *Si $(A_n)$ est un S.C.E, $\mathbb{P}(B) = \sum \mathbb{P}(B \cap A_n)$*
(6) : *croissante alors $\mathbb{P}(\bigcup_n A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$.*
(7) : *quelconque alors $\mathbb{P}(\bigcup_n A_n) \leqslant \sum_n \mathbb{P}(A_n)$.*
(8) : *négligeables alors $\mathbb{P}(\bigcup_n A_n) = 0$.*
(9) : *décroissante alors $\mathbb{P}(\bigcap_n A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$.*
(10) : *presque sûrs alors $\mathbb{P}(\bigcap_n A_n) = 1$.*

2. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur le réel $\lambda$ pour que l'on définisse une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ en posant $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(\{n\}) = \dfrac{\lambda}{2^n}$.
On choisit alors un entier au hasard. Quelle est la probabilité qu'il soit pair ? Qu'il soit supérieur à un entier $N$ donné ?
*Il faut et il suffit que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\{n\}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{\lambda}{2^n} = 2 \cdot \lambda = 1$.*
*On pose alors $\lambda = \dfrac{1}{2}$.*
*Alors si $A = \{$ l'entier est pair $\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{2k\}$. Cette union est dénombrable et les évènements $\{2k\}$ sont 2 à 2 disjoints. Donc $\mathbb{P}(A) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2^{2k}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1 - 1/4} = \dfrac{2}{3}$.*

3. Rappeler la définition d'une famille $(A_i)_{i\in I}$ d'événements mutuellement indépendants.
*Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'évènements. On dit qu'ils sont* mutuellement indépendants *lorsque pour tous indices $i_1, \dots, i_k \in I$ distincts, on a $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \dots \mathbb{P}(A_{i_k})$.*

4. Citer la formule des probabilités composées en précisant ses hypothèses.
*si $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) > 0$ :*

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n \cap B) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1\cap A_2}(A_3) \dots \mathbb{P}_{A_1\cap\dots\cap A_n}(B)$$

**5.** Citer la formule des probabilités totales et la formule de Bayes en précisant les hypothèses.
**Formule des probabilités totales :** *si $\Omega = \bigsqcup_n A_n$ (on dit que la famille $(A_n)$ est un système complet d'événements) et $\forall n$, $\mathbb{P}(A_n) > 0$ :*

$$\mathbb{P}(B) = \sum_n \mathbb{P}_{A_n}(B)\mathbb{P}(A_n)$$

**Formule de** Bayes **:** *si $(A_n)$ est un système complet d'événements et si de plus $\mathbb{P}(B) > 0$ :*

$$\mathbb{P}_B(A_i) = \mathbb{P}_{A_i}(B)\mathbb{P}(A_i)/\sum_n \mathbb{P}_{A_n}(B)\mathbb{P}(A_n)$$

# Série 3

**1.** Si les évènements $(A_i)_{i\in I}$ sont mutuellement indépendants alors que vaut $\mathbb{P}(\bigcap_i A_i)$ ?
*Lorsque $I$ est fini ou dénombrable, $\mathbb{P}(\bigcap_i A_i) = \prod_i \mathbb{P}(A_i)$ (borne inférieure des produits finis).*

**2.** Si les évènements $(A_i)_{i\in I}$ sont 2 à 2 incompatibles (disjoints) alors que vaut $\mathbb{P}(\cup_i A_i)$ ?
*Lorsque $I$ est fini ou dénombrable, $\mathbb{P}(\sup_i A_i) = \sum_i \mathbb{P}(A_i)$ (borne sup des sommes finies).*

**3.** Citer le théorème de la loi des grands nombres. Comment le démontre-t-on ?
*Soit $(X_n)$ une suite de vard deux à deux indépendantes de même loi, ayant une espérance $m$ et une variance $v$ finies. Alors, pour tout $a > 0$, $\mathbb{P}(|\dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - m| \geqslant a) \leqslant \dfrac{v}{na^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.*
*Il se démontre à partir de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliqué à la variable $M = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ en remarquant que $\mathbb{E}(M) = \mathbb{X}_\daleth = m$ par linéarité de l'espérance et que $\mathbb{V}(M) = n\mathbb{V}(X_i) = n \cdot v$ par somme de variances de variables 2 à 2 indépendantes (cette hypothèse est d'ailleurs suffisante)*

**4.** Soit $X_1$ et $X_2$ deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On suppose que $X_1$ et $X_2$ sont indépendantes et suivent une loi de Poisson, de paramètres respectifs $\lambda_1$ et $\lambda_2$.
Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.
*$X_1(\Omega) = \mathbb{N}$ et $X_2(\Omega) = \mathbb{N}$ donc $(X_1 + X_2)(\Omega) = \mathbb{N}$.*
*Soit $n \in \mathbb{N}$.*
*$(X_1 + X_2 = n) = \bigcup\limits_{k=0}^{n} ((X_1 = k) \cap (X_2 = n - k))$ (union d'évènements deux à deux disjoints).*
*Donc :*

$$\begin{aligned}
P(X_1 + X_2 = n) &= \sum_{k=0}^{n} P\left((X_1 = k) \cap (X_2 = n-k)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} P(X_1 = k)P(X_2 = n-k) \text{ car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes.} \\
&= \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^k}{k!} \times e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\lambda_1^k\lambda_2^{n-k} \\
&= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda_1^k\lambda_2^{n-k} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}
\end{aligned}$$

*Ainsi $X_1 + X_2 \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.*
***Remarque*** *: cette question peut aussi être traitée en utilisant les fonctions génératrices.*

*On suppose que $X_1$ et $X_2$ sont indépendantes et suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1$ et $\lambda_2$.*
*$D_{G_{X_1}} = D_{G_{X_2}} = \mathbb{R}$ et, si on pose $Z = X_1 + X_2$, alors $[-1, 1] \subset D_{G_Z}$.*
*Alors, $\forall\, t \in [-1, 1]$, $G_Z(t) = E(t^{X_1+X_2}) = E(t^{X_1}t^{X_2}) = E(t^{X_1})E(t^{X_2})$ car $X_1$ et $X_2$ sont indépendantes et donc, d'après le cours, $t^{X_1}$ et $t^{X_2}$ sont indépendantes.*
*Donc, $G_Z(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1(t-1)}\mathrm{e}^{\lambda_2(t-1)} = \mathrm{e}^{(\lambda_1+\lambda_2)(t-1)}$.*

*On reconnaît la fonction génératrice d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.*
*Donc, comme $Z$ a la même fonction génératrice qu'une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$, alors $Z = X_1 + X_2$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.*

5. Déterminer la fonction génératrice d'une v.a.r $X$ qui suit une loi géométrique.
   $G_X(t) = pt/(1-qt)$. *En effet,* $\mathbb{E}(t^X) = \sum_{\mathbb{N}^*} t^k q^{k-1} p = pt \sum_{\mathbb{N}^*} (tq)^{k-1} = \dfrac{pt}{(1-qt)}$ *par somme d'une série géométrique convergente pour* $|tq| < 1$.
6. Compléter les formules des lois marginales pour un couple de variables aléatoires :
   $\mathbb{P}(X = x) =$
   $\mathbb{P}(Y = y) =$
   $\mathbb{P}(X + Y = z) =$
   $\mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$
   $\mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$
   $\mathbb{P}(X + Y = z) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = z - x]) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([X = z - y] \cap [Y = y])$

# Série 4

1. Soient $X, Y$ indépendantes de lois $\mathcal{G}(p)$ et $\mathcal{G}(p')$. Montrer que $\mathbb{P}(X > n) = (1-p)^n$. En déduire que $\min(X, Y) \sim \mathcal{G}(p + p' - pp')$.
   $\mathbb{P}(X > n) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant n) = 1 - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = k) = 1 - \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} p$.
   $\mathbb{P}(X > n) = 1 - p \sum_{k=0}^{n-1} q^k = 1 - p\dfrac{1 - q^n}{1 - q} = 1 - (1 - q^k) = q^k$.
   *Ce résultat est très important (fonction d'antirépartition d'une loi géométrique)*
   *Alors* $\mathbb{P}(\min(X, Y) > n) = \mathbb{P}(X > n \cap Y > n) = \mathbb{P}(X > n)\mathbb{P}(Y > n)$ *car* $X$ *et* $Y$ *sont indépendantes.*
   *Finalement,* $\mathbb{P}(\min(X, Y) > n) = q^n q'^n = (qq')^n$.
   *Donc* $\min(X, Y)$ *suit une loi géométrique de paramètre* $p'' = (1 - qq') = p + p' - pp'$
2. Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   On suppose que la loi du couple $(X, Y)$ est donnée par :
   $\forall\, (i, j) \in \mathbb{N}^2,\ P((X = i) \cap (Y = j)) = \dfrac{1}{\mathrm{e}\, 2^{i+1} j!}$ Déterminer les lois de $X$ et de $Y$.
   $\forall\, (i, j) \in \mathbb{N}^2,\ P((X = i) \cap (Y = j)) = \dfrac{1}{\mathrm{e}\, 2^{i+1} j!}$.
   $X(\Omega) = \mathbb{N}$.
   *Soit* $i \in \mathbb{N}$.
   $\displaystyle\sum_{j \geqslant 0} \frac{1}{\mathrm{e}\, 2^{i+1} j!} = \frac{1}{\mathrm{e}\, 2^{i+1}} \sum_{j \geqslant 0} \frac{1}{j!}$ *converge et* $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}\, 2^{i+1} j!} = \frac{1}{2^{i+1}}$.
   *Or* $P(X = i) = \displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} P((X = i) \cap (Y = j))$ *donc* $P(X = i) = \displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e} 2^{i+1} j!} = \frac{1}{\mathrm{e} 2^{i+1}} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} = \frac{1}{2^{i+1}}$.
   *Conclusion :* $\forall\, i \in \mathbb{N},\ P(X = i) = \dfrac{1}{2^{i+1}}$.
   $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

   *Soit* $j \in \mathbb{N}$.
   $\displaystyle\sum_{i \geqslant 0} \frac{1}{\mathrm{e}\, 2^{i+1} j!} = \frac{1}{2\mathrm{e} j!} \sum_{i \geqslant 0} \left(\frac{1}{2}\right)^i$ *converge (série géométrique de raison* $\frac{1}{2}$*) et* $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}\, 2^{i+1} j!} = \frac{1}{2\mathrm{e} j!} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\mathrm{e} j!}$.
   *Or* $P(Y = j) = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} P((X = i) \cap (Y = j))$.
   *Donc* $P(Y = j) = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{e 2^{i+1} j!} = \frac{1}{2\mathrm{e} j!} \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{2\mathrm{e} j!} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\mathrm{e} j!}$.
   *Conclusion :* $\forall\, j \in \mathbb{N},\ P(Y = j) = \dfrac{1}{\mathrm{e} j!}$.
3. Donner la définition du polynôme minimal d'une matrice $M$.
   *L'ensemble* $I_M = \{P \in \mathbb{K}[X] | P(M) = 0\}$ *est un idéal de* $\mathbb{K}[X]$*, donc il est monogène.*
   *Lorsqu'il n'est pas réduit à* $I_M = \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$*, on pose* $\mu_M$ *son générateur unitaire.*
4. Donner la définition du polynôme caractéristique d'une matrice carrée.
   $\chi_A = det(XI_n - A)$

**5.** Citer la formule des sommes de Riemann. Quelle est la limite de $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\dfrac{k}{\sqrt{4n^2-k^2}}$ ?

*Si $f$ est continue par morceaux sur l'intervalle $[a,b]$ alors, en notant $a_i = a + i\frac{b-a}{n}$ :*

$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a_i) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f$ *et* $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f$

*Ici, on pose $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$. La fonction $f$ est continue sur $[0,1]$, donc par théorème des sommes de Riemann,*

$u_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\dfrac{k}{\sqrt{4n^2-k^2}} = 0 + \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k/n}{\sqrt{4-(k/n)^2}} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k/n) \longrightarrow \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\sqrt{4-x^2}\right]_0^1 = 2-\sqrt{3}$

**6.** Citer le théorème de convergence dominée.

*Soit $(f_n)$ une suite de fonctions de $I$ dans $\mathbb{R}$ continues par morceaux, $f : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux telles que :*

*(i)* $\forall\, x \in I,\ f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ ;

*(ii)* $\forall\, x \in I,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ |f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$ ;

*(iii)* $\displaystyle\int_I \varphi < +\infty$.

*Alors les $f_n$ et $f$ sont intégrables et on a* $\displaystyle\int_I f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_I f$ .

**7.** Quelles sont les intégrales convergentes ?

a $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ convergente par critère de Riemann en 0 (distance finie) car $1/2 < 1$.

b $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t}}$ convergence par critère de Riemann en $+\infty$ (distance infinie) car $3/2 > 1$.

c $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{dt}{t^{3/2}}$ divergente ! elle ne peut pas vérifier les critères de Riemann en 0 et en l'infini simultanément !...

d $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt[3]{t-1}}$ convergente par critère de Riemann en 1 (distance finie) car $1/3 < 1$

# Série 5

**1.** soient $X_1, X_2$ indépendantes de lois $\mathcal{B}(m,p)$ et $\mathcal{B}(n,p)$. Alors $X_1 + X_2 \sim \mathcal{B}(m+n,p)$.

*Comme pour la somme de 2 v.a.r. qui suivent des lois de Poisson, on peut trouver le résultat par formule de probabilités totales.*

**Mais** *il est préférable de passer par les fonctions génératrices :*

*On suppose que $X_1$ et $X_2$ sont indépendantes et suivent des lois binomiales de paramètres respectifs $(m,p)$ et $(n,p)$.*
*$D_{G_{X_1}} = D_{G_{X_2}} = \mathbb{R}$ et, si on pose $Z = X_1 + X_2$, alors $[-1,1] \subset D_{G_Z}$.*
*Alors, $\forall\, t \in [-1,1]$, $G_Z(t) = E(t^{X_1+X_2}) = E(t^{X_1}t^{X_2}) = E(t^{X_1})E(t^{X_2})$ car $X_1$ et $X_2$ sont indépendantes et donc, d'après le cours, $t^{X_1}$ et $t^{X_2}$ sont indépendantes.*
*Donc, $G_Z(t) = (q+pt)^m(q+pt)^n = (q+pt)^{m+n}$.*

*On reconnaît la fonction génératrice d'une loi binomiale de paramètres $(m+n,p)$.*
*Donc, comme $Z$ a la même fonction génératrice qu'une loi binomiale de paramètres $(m+n,p)$, alors $Z = X_1 + X_2$ suit une loi binomiale de paramètres $(m+n,p)$.*

**2.** Citer la définition puis les propriétés de la variance d'une v.a.r. et de la covariance de 2 v.a.r.

*Soient $X, Y$ deux vard ayant des moments d'ordre 2.*

(11) : *On pose $Cov(X,Y) = \mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y)))$.*

(12) : *On dit que $X$ et $Y$ sont non corrélées lorsque $Cov(X,Y) = 0$.*

(13) : $Cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

(14) : $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2Cov(X,Y)$ ; $\mathbb{V}(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_i \mathbb{V}(X_i) + 2\sum_{i<j} Cov(X_i,X_j)$.

(15) : $Cov(X,Y)^2 \leqslant \mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)$.

(16) : $Cov(X,Y)^2 = \mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y) \Longleftrightarrow \exists\,(a,b), \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *tq $aX + bY$ est presque sûrement constante.*

(17) : *Lorsque $X$ et $Y$ sont indépendantes, $Cov(X,Y) = 0$ (réciproque fausse).*

(18) : *Lorsque $X_1, \ldots, X_n$ sont deux à deux indépendantes, $\mathbb{V}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathbb{V}(X_1) + \cdots + \mathbb{V}(X_n)$.*

**3.** Citer l'inégalité de Markov. La démontrer.

*Soient $X$ v.a.r et $a \in ]0, +\infty[$. L'inégalité suivante s'entend dans $[0, +\infty]$.*

Markov *:* $\mathbb{P}(|X| \geqslant a) \leqslant \mathbb{E}(|X|)/a$

*En effet,* $|X| = |X|\mathbb{1}_{|X|<a} + |X|\mathbb{1}_{|X|\geqslant a}$.

*Donc* $|X| \geqslant |X|\mathbb{1}_{|X|<a} + a\mathbb{1}_{|X|\geqslant a}$

*Et par croissance de l'espérance :*

$\mathbb{E}(|X|) \geqslant \mathbb{E}(|X|\mathbb{1}_{|X|<a}) + \mathbb{E}(a\mathbb{1}_{|X|\geqslant a})$.

*Finalement,* $\mathbb{E}(|X|) - \mathbb{E}(|X|\mathbb{1}_{|X|<a}) \geqslant \mathbb{E}(a\mathbb{1}_{|X|\geqslant a}) = a\mathbb{P}(|X| \geqslant a)$ *et comme* $|X|\mathbb{1}_{|X|<a}$ *est une variable positive, son espérance l'est également et*

$\mathbb{E}(|X|) \geqslant a\mathbb{P}(|X| \geqslant a)$. *L'inégalité de Markov s'obtient en divisant par $a > 0$.*

**4.** Rappeler les formules de changement de bases.

*Si $P = P_\beta^{\beta'}$ est la matrice de passage de l'ancienne base $\beta$ vers la nouvelle base $\beta'$, alors $P_\beta^{\beta'}$ est la matrice de l'identité depuis la base de départ $\beta'$ vers la base d'arrivée $\beta$. Alors si $X$ est la matrice des coordonnées d'un vecteur $u$ exprimé dans la base $\beta$ et $X'$ celle des coordonnées du même vecteur dans la base $\beta'$, alors $X = PX'$.*

*Si $f$ est un endomorphisme dont la matrice dans la base $\beta$ est $A$ et celle dans la base $\beta'$ est $B$ alors $B = P^{-1}AP$.*

**5.** Justifier que toute matrice de $\mathcal{M}_{2k+1}(\mathbb{R})$ admet au moins une valeur propre réelle.

*Si $M \in \mathcal{M}_{2k+1}(\mathbb{R})$, $\chi_M$ est un polynôme réel de degré impair. Par théorème des valeurs intermédiaires, $\chi_M$ admet au moins une racine. Comme $Sp_{\mathbb{R}}(M) = Racines(\chi_M)$, $M$ admet au moins une valeur propre réelle.*

**6.** Développement limité en 0 à l'ordre $n$ de $(1+x)^\alpha$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + O(x^{n+1})$$

**7.** Citer le théorème de comparaison séries/intégrales. En déduire que la série de Bertrand de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.

*Soit $f : [a, +\infty[ \to \mathbb{R}$ continue par morceaux, positive décroissante.*

*On pose* $F(x) = \displaystyle\int_{[a,x]} f$ *et* $\displaystyle\int_{[a,+\infty[} f = \lim_{x\to+\infty} F(x) \in [a, +\infty]$.

(19) : *La série de terme général* $f(n) - \displaystyle\int_{[n,n+1]} f$ *est convergente et sa somme est majorée par $f(a)$.*

(20) : $\sum f(n)$ *converge* $\Longleftrightarrow F$ *est majorée* $\Longleftrightarrow \displaystyle\int_{[a,+\infty[} f$ *est une valeur finie.*

*Or* $f : x \mapsto \dfrac{1}{x(\ln x)^2}$ *est décroissante sur $[2, +\infty[$ et $f$ est la dérivée de* $F : x \mapsto -\dfrac{1}{\ln x}$ *qui est majorée sur $[2, +\infty[$.*

*Donc par théorème de comparaison séries/intégrales, la série* $\sum \frac{1}{n(\ln n)^2}$ *est convergente !*

**8.** Citer le théorème de permutation série/intégrale de Beppo-Levi

*On rappelle que ce théorème ressemble beaucoup au théorème de Fubini (permutation de deux sommes discrètes) : il faut donc une hypothèse du type "convergence absolue" :*

*Soit $(g_n)$ une suite de fonctions de $I$ dans $E$ continues par morceaux et $g : I \to E$ continue par morceaux telle que pour tout $x \in I$ :* $g(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} g_k(x)$ *(convergence simple).*

*Si* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \int_I |g_k| < +\infty$ *alors $g$ est intégrable sur $I$ et* $\displaystyle\int_I g = \sum_{k=0}^{\infty} \int_I g_k$.

## IV — Exercices :

### 1) Exercices CCP :

**Tous** les exercices de probabilité de la banque CCP !