Révisions 5 : Algèbre bilinéaire

I — Le B.A.BA

1) Définitions théorèmes :

Liste non exhaustive des éléments du cours à maîtriser :

— Définition d'un p.s.e., d'un espace préhilbertien, d'un espace euclidien.
Exemples sur $\mathbb{R}^n$, sur $\mathbb{R}[X]$, sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, sur $\mathcal{L}^2(I,\mathbb{R})$.
Exo 81, sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, sur $\mathcal{L}^2(I,\mathbb{R})$, sur $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$.
— Inégalité de Cauchy-Schwarz **Exo 76-79**. Inégalité triangulaire. Norme euclidienne associée.
— Identité remarquable. Identité du parallélogramme. Identité de polarisation.
— Orthogonal d'une partie **Exo 77-80**.
— L'orthogonal d'une partie est un fermé pour la norme euclidienne (continuité du produit scalaire).
— Théorème du supplémentaire orthogonal pour un s.e.v. de DF.
— Théorème de la projection orthogonale sur un s.e.v. de DF. Distance à un s.e.v. de DF.
— Projection orthogonale. Propriétés.
— Caractérisation métrique de la projection orthogonale.
— Expression de la projection orthogonale sur un s.e.v. de DF dans une BON.
— Famille orthonormée.
— Orthonormalisation de Schmidt. Distance à un sous espace.
— Suite totale. Inégalité de Bessel. Égalité de Parseval.
— Polynômes orthogonaux : polynômes de Legendre, de Laguerre, de Hermite, de Tchebychev.
— Application orthogonale. $\mathcal{O}(E)$. Isométrie vectorielle. Exemples.
— Expression dans une BON **Exo 78**. Propriétés.
— Description de $O(E)$ pour $\dim(E) \leqslant 3$. Réflexions, rotations. Recherche d'axe et d'angle.
— Réduction des automorphismes orthogonaux. Diagonalisation par blocs.
— Endomorphisme symétrique. $\mathcal{S}(E)$. Définition, exemples.
— Stabilité de l'orthogonal.
— Théorème spectral géométrique. Théorème spectral matriciel **Exo 68** .
— Endomorphisme antisymétrique. Définition.

II — Méthodes :

- Pour calculer le projeté orthogonal d'un vecteur x sur F (de dimension finie), on peut déterminer une base orthonormée de F par procédé de Gramm-Schmidt, puis appliquer la formule du cours : $p_F(x) = \sum_{k=1}^{n} < x|f_k > f_k$.
- Pour montrer qu'une famille (e_n) est totale, on montre que $< e_i|e_j = \delta_i^j$ puis que l'adhérence de $\{e_n\}$ est égale à E, c'est à dire que tout x vecteur de E est limite d'une suite de combinaisons linéaires des e_n.
- Pour exploiter qu'une famille (e_n) est totale, on commencera par considérer la suite de sous espaces vectoriels $F_n = Vect(e_1, e_2, \dots, e_n)$ et la suite de projecteurs orthogonaux p_n sur F_n.
Alors pour tout $x \in E$, la suite $p_n(x)$ converge vers x lorsque n tend vers $+\infty$.
- Pour montrer qu'un endomorphisme est orthogonal, on peut vérifier l'une de ces trois caractérisations :
— $\forall x, y \in E, < f(x)|f(y) >=< x|y >$
— $\forall x \in E, ||x|| = ||f(x)||$
— dans une BON β, $Mat_\beta(f) = A$ vérifie $A^t A = I_n$.
- Pour exploiter que A est une matrice orthogonale, on pourra utiliser que $A^t A = I_n$ ou bien $A^{-1} =^t A$ ou bien que les colonnes forment une base orthonormée ou bien que les lignes forment une base orthonormée.
- Pour montrer qu'un endomorphisme est symétrique, on peut vérifier l'une de ces trois caractérisations :
— $\forall x, y \in E, < f(x)|y >=< x|f(y) >$
— dans une BON β, $Mat_\beta(f) = A$ vérifie $A =^t A$.
— **il existe une** BON β' telle que $Mat_{\beta'}(f) = D$ est diagonale.

III — Interrogations de cours quotidiennes (jeudi-vendredi-samedi) :

Série 4

1. Rappeler la définition d'un produit scalaire euclidien, d'un espace préhilbertien et d'un espace euclidien.

2. Quel est le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

3. Citer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

4. Citer l'inégalité triangulaire et son cas d'égalité. Citer la formule de l'identité du parallélogramme. La démontrer.

5. Soit $a \in E$. Justifier que $\phi_a : x \mapsto < x|a >$ est une application continue de $(E, < \mid >)$ dans $(\mathbb{R}, |.|)$.
En déduire que si A est une partie de $(E, < \mid >)$ alors $A^\perp$ est un sev fermé de E pour la norme associée au produit scalaire.

6. Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $< f, g >= \int_{[0,1]} fg$. Soit $F = \{x \mapsto P(x) | P \in \mathbb{R}[X]\}$ l'ensemble des fonctions polynomiales de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer que F et $F^\perp$ ne sont pas supplémentaires dans E (on pourra déterminer $F^\perp$).

Série 5

1. Citer le théorème de la projection orthogonale.

2. Définir une famille totale.

3. Définir un endomorphisme orthogonal puis un endomorphisme symétrique.

4. Citer des propriétés d'un endomorphisme orthogonal.

5. À quelle(s) condition(s) une projection orthogonale est-elle un endomorphisme orthogonal ?

6. Montrer que pour F, G sev de E, on a l'égalité $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

Série 6

1. Montrer que $f : P \mapsto ((X^2-1)P')'$ sur $E = \mathbb{R}[X]$ est un endomorphisme symétrique pour le produit scalaire défini par $(P \mid Q) = \int_{[-1,1]} PQ$.

2. Si $dim(E) = n$, quelle est la dimension de $\mathcal{S}(E)$?

3. Citer le théorème spectral géométrique et matriciel.

4. Etudier la nature de l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice
$$A = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

5. Soit u un endomorphisme symétrique à valeurs propres positives d'un espace vectoriel euclidien E. Montrer qu'il existe un endomorphisme v symétrique à valeurs propres positives tel que $u = v^2$.

6. Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que $sp(S) \subset \mathbb{R}_+$ si et seulement si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $tXSX \geqslant 0$
(on dit alors que S est une matrice symétrique "positive").

IV — Interrogations : corrections.

Série 4

1. Rappeler la définition d'un produit scalaire euclidien, d'un espace préhilbertien et d'un espace euclidien.

(1) : *Un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-ev E est une forme bilinéaire, symétrique, définie positive :*

$$(.|.) : \left\{ \begin{array}{ccc} E^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & (x \mid y) \end{array} \right.$$

(2) : *Un espace préhilbertien E est un $\mathbb{R}$-ev muni d'un produit scalaire.*

(3) : *Un espace euclidien est un espace préhilbertien de dimension finie.*

2. Quel est le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
$(A|B) = Tr({}^tA \cdot B)$

3. Citer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
Pour x et y dans $(E, <\mid>)$ préhilbertien, $< x \mid y >^2 \leqslant \|x\|^2\|y\|^2$ avec égalité si et seulement si (x,y) est liée.
Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $P(\lambda) = ||x+\lambda y||^2 = ||x||^2 + 2\lambda < x|y > +\lambda^2||y||^2$.
Si $y = 0$, l'inégalité est vérifiée. Sinon, P est un polynôme de degré égal à 2, qui a un signe constant positif sur $\mathbb{R}$. Donc son discriminant $\Delta = 4 < x|y > -A||x||^2||y||^2$ est négatif ou nul, ce qui donne l'inégalité de C.-S.
Si x_0, y_0 sont tels que $||x_0||^2||y_0||^2 =< x_0|y_0 >^2$, alors le discriminant s'annule et P admet une racine (double) λ_0 telle que $||x_0 + \lambda_0 y_0|| = 0$. Donc $x_0 + \lambda_0 y_0 = 0$ par axiome de séparation et la famille (x_0, y_0) est liée.
Réciproquement, si (x,y) est liée, il existe par exemple λ tel que $x = \lambda y$ et $< x|y >^2 =< x|\lambda x >^2 = \lambda^2||x||^4 = ||x||^2||\lambda x||^2 = ||x||^2||y||^2$.
***Commentaire :** toujours penser à vérifier l'homogénéité de la formule !!!*

4. Citer l'inégalité triangulaire et son cas d'égalité. Citer la formule de l'identité du parallélogramme. La démontrer.
***Inégalité triangulaire :** $\forall (x,y) \in E^2, \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ avec égalité si et seulement si (x,y) est positivement liée.*
Elle se démontre à partir de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
***Identité du parallélogramme :** $\forall (x,y) \in E^2, \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.*
En effet, on rappelle les identités remarquables classiques : $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2 < x|y > + \|y\|^2$ et $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2 < x|y > + \|y\|^2$.
Alors : $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + 2 < x|y > + \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2 < x|y > + \|y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

5. Soit $a \in E$. Justifier que $\phi_a : x \mapsto < x|a >$ est une application continue de $(E, <\mid>)$ dans $(\mathbb{R}, |.|)$.
En déduire que si A est une partie de $(E, <\mid>)$ alors $A^\perp$ est un sev fermé de E pour la norme associée au produit scalaire.
*Soit $a \in E$. L'application $\phi_a : (x,a) \mapsto < x|a >$ est une application linéaire. Et d'après Cauchy Schwarz, $|\phi(x,a)| = | < x \mid a > | \leqslant \|x\|\|a\|$. Donc cette application est $\|a\|$-lipschitzienne, donc ϕ_a est **continue**.*
Alors $a^\perp = \{x \in E| < x|a >= 0\} = \phi^{-1}(\{0\})$ est la préimage d'un fermé de $(\mathbb{R}, |.|)$ par l'application continue ϕ_a, donc est un fermé de $(E, <\mid>)$.
Soit A une partie de E. Alors $A^\perp = \{x \in E | \forall a \in A, < x|a >= 0\} = \bigcap_{a\in A} a^\perp$ est une intersection (quelconque) de fermés, donc un fermé de $(E, <\mid>)$!

6. Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $< f, g >= \int_{[0,1]} fg$. Soit $F = \{x \mapsto P(x) | P \in \mathbb{R}[X]\}$ l'ensemble des fonctions polynomiales de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer que F et $F^\perp$ ne sont pas supplémentaires dans E (on pourra déterminer $F^\perp$).
Très importante application du "lemme des moments" : *soit $g \in F^\perp$. Alors $\forall P \in \mathbb{R}[X], \int_{[0,1]} g(x)P(x)dx = 0$.*
Comme g est continue sur le segment $[0,1]$, d'après le th. de Stone-Weierstrass, il existe une suite (P_n) de polynômes qui converge uniformément vers g sur $[0,1]$.
C'est à dire $||g - P_n||_\infty \longrightarrow 0$.
Or $\left| \int_{[0,1]} g^2 - \int_{[0,1]} P_n g \right| = \left| \int_{[0,1]} g(g - P_n) \right|$
Comme $|g|$ est continue sur un segment, $|g|$ est bornée (et atteint ses bornes, mais on ne l'utilisera pas ici) par M. Alors :
$0 \leqslant \left| \int_{[0,1]} g^2 - \int_{[0,1]} P_n g \right| \leqslant M \int_{[0,1]} |g - P_n| \leqslant M||g - P_n||_\infty \longrightarrow 0$.
Par théorème d'encadrement, $\int_{[0,1]} g^2 - \int_{[0,1]} P_n g \longrightarrow 0$, autrement dit, $\int_{[0,1]} P_n g \longrightarrow \int_{[0,1]} g^2$.
Or $\int_{[0,1]} P_n g = 0$. Donc $\int_{[0,1]} g^2 = 0$ par unicité de la limite.
La fonction g^2 est positive, continue, d'intégrale nulle, donc $g^2 = 0$ et enfin $g = 0$.
Nous avons donc démontré que $F^\perp = \{0\}$ (la fonction nulle). Ainsi, $F \oplus F^\perp = F \neq E$. Donc F et $F^\perp$ ne sont pas supplémentaires.

Série 5

1. Citer le théorème de la projection orthogonale.

   Si F est un sev de E tel que $F \oplus F^{\perp} = E$ (en particulier, si F de dimension finie), alors on peut définir π_F la projection orthogonale sur F parallèlement à $F^{\perp}$.

   Cette projection vérifie les conditions suivantes :

   (4) : *Pour $a \in E$, $a = \pi_F(a) + \pi_{F^{\perp}}(a)$ (définition).*

   (5) : *Pour $a \in E$ et $b \in F$, on a $(a \mid b) = (\pi_F(a) \mid b)$.*

   (6) : *Pour $a, b \in E$, on a $(\pi_F(a) \mid b) = (\pi_F(a) \mid \pi_F(b)) = (a \mid \pi_F(b))$.*

   (7) : *Pour $a \in E$, on a $\|\pi_F(a)\| \leqslant \|a\|$ avec égalité si et seulement si $a \in F$.*

2. Définir une famille totale.

   On dit que la famille $\{e_i\}_{i \in I}$ de E est orthonormale ssi $\forall (i,j) \in I^2, (e_i|e_j) = \delta_i^j$ (on rappelle qu'une famille orthonormale est libre).

   Alors la suite $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est dite totale dans E si elle est orthonormale et si le sous-espace $F = Vect(e_k,\ k \in \mathbb{N})$ est dense dans E.

3. Définir un endomorphisme orthogonal puis un endomorphisme symétrique.

   Soit $(E, (.|.)$ un espace préhilbertien.

   On dit qu'une application $f : E \to E$ est orthogonale si et seulement si $\forall (x,y) \in E^2, (f(x) \mid f(y)) = (x \mid y)$. L'ensemble des applications orthogonales est noté $\mathcal{O}(E)$.

   On dit que l'endomorphisme $f : E \to E$ est symétrique si et seulement si $\forall (x,y) \in E^2$, $(f(x) \mid y) = (x \mid f(y))$.

4. Citer des propriétés d'un endomorphisme orthogonal.

   (8) : *Toute application orthogonale est nécessairement linéaire et injective. Lorsque E est euclidien, c'est un isomorphisme.*

   (9) : *La composée d'endomorphismes orthogonaux et la réciproque d'un endomorphisme orthogonal bijectif sont des endomorphismes orthogonaux.*

   (10) : *Lorsque E est euclidien, $\mathcal{O}(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$ (groupe orthogonal de E).*

   (11) : *Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E alors f est orthogonale $\Longleftrightarrow M = Mat_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{O}(n)$, i.e. ${}^tMM = I_n$. Dans ce cas, $Mat_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = {}^tM$ (réciproque vraie)* et $\det(f) = \pm 1$ *(réciproque fausse).*

   (12) : *Si $\dim(E) = n$ alors les groupes $\mathcal{O}(E)$ et $\mathcal{O}(n)$ (resp. $\mathcal{O}^+(E)$ et $\mathcal{O}^+(n)$) sont isomorphes.*

   (13) : *En dimension finie, le déterminant d'une réflexion est égal à -1 et le déterminant d'une composée de p réflexions est égal à $(-1)^p$.*

   (14) : *Les seules valeurs propres possibles pour un endomorphisme orthogonal sont ± 1. Lorsque -1 et 1 sont effectivement valeurs propres, les sous-espaces propres associés sont orthogonaux.*

   (15) : *Un endomorphisme orthogonal conserve la norme, les distances et les angles non orientés de vecteurs non nuls.*

   (16) : *Si E est un espace euclidien, alors f est orthogonale $\Longleftrightarrow$ il existe une BON $\mathcal{B}$ de E telle que $f(\mathcal{B})$ est une BON de E $\Longleftrightarrow$ pour toute BON $\mathcal{B}$ de E, $f(\mathcal{B})$ est une BON de E.*

5. À quelle(s) condition(s) une projection orthogonale est-elle un endomorphisme orthogonal ?

   Analyse : *un endomorphisme orthogonal doit être injectif. Donc son noyau doit être nul. Si f est une projection,* $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = E$. *Donc si f est une projection et f est un endomorphisme orthogonal,* $\operatorname{Im} f = E$.

   Donc f doit être égale à l'application identité.

   Synthèse : *l'identité est effectivement une projection et un endormorphisme orthogonal.*

6. Montrer que pour F, G sev de E, on a l'égalité $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.

   Par double inclusion :

   • *inclusion directe : comme $F \subset F+G$, $(F+G)^{\perp} \subset F^{\perp}$. De même $(F+G)^{\perp} \subset G^{\perp}$. Donc $(F+G)^{\perp} \subset F^{\perp} \cap G^{\perp}$.*

   • *inclusion réciproque : soit $x \in F^{\perp} \cap G^{\perp}$. Soit $y \in F+G$. Alors $y = y_F + y_G$ où $y_F \in F$ et $y_G \in G$. Ainsi,* $< x|y > = < x|y_F > + < x|y_G > = 0 + 0 = 0$.

   Donc $x \in (F+G)^{\perp}$.

Série 6

1. Montrer que $f : P \mapsto ((X^2-1)P')'$ sur $E = \mathbb{R}[X]$ est un endomorphisme symétrique pour le produit scalaire défini par $(P \mid Q) = \int_{[-1,1]} PQ$.

   Si $P, Q \in E$, $< f(P)|Q > = \int_{[-1,1]} f(P)Q = \int_{[-1,1]} ((x^2-1)P'(x))' \cdot Q(x)dx = [(x^2-1)P'(x)Q'(x)]_{-1}^{1} - \int_{[-1,1]} (x^2-1)P'(x) \cdot Q'(x)dx$ en faisant une intégration par parties.

   Or cette dernière expression est symétrique en les rôles de P et Q, donc $< f(P)|Q > = < f(Q)|P > = < P|f(Q) >$ par symétrie du produit scalaire.

   Donc f est un endomorphisme symétrique.

2. Si $dim(E) = n$, quelle est la dimension de $\mathcal{S}(E)$?

Dans une base orthonormée, les endomorphismes symétriques sont exactement les endomorphismes qui sont représentées par les matrices symétriques.

Donc la dimension de $\mathcal{S}(E)$ est égale à la dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, c'est à dire $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

3. Citer le théorème spectral géométrique et matriciel.

Soient E un ev euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ symétrique.

(17) : *Alors E est la somme orthogonale des sous-espaces propres de f c'est à dire f est diagonalisable dans une base orthonormée, c'est à dire qu'***il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ propre pour f.**

(18) : *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique* **à coefficients réels**.
Alors toutes les valeurs propres de M sont réelles et M est diagonalisable au moyen d'une matrice orthogonale :
il existe une matrice $P \in \mathcal{O}(n)$ telle que $P^{-1}MP = {}^tPMP$ est diagonale.

4. Etudier la nature de l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice
$A = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

On vérifie que $A^tA = I_3$, donc $A \in O_3^+(\mathbb{R})$.

Son déterminant est égal à 1. Donc c'est une rotation. Son axe est égal à $\mathrm{Ker}(A - I_3) = Vect(-3, 1, 1)$.

La trace de A (invariant de similitude) est égale à $1 + 2\cos\theta$. Donc $\cos\theta = -5/6$.

Donc l'angle de rotation est $\pm\arccos(-5/6)$.

Si on pose $u = (-3, 1, 1)$ comme vecteur qui oriente cet axe. En posant $i = (1, 0, 0)$, le signe de $\sin(\theta)$ doit être le même que celui de $det(i, f(i), u)$, c'est à dire négatif.

Finalement, f est la rotation autour de l'axe orienté par u et d'angle $\arccos(-5/6)$.

5. Soit u un endomorphisme symétrique à valeurs propres positives d'un espace vectoriel euclidien E. Montrer qu'il existe un endomorphisme v symétrique à valeurs propres positives tel que $u = v^2$.

D'après le th. spectral, u est diagonalisable dans une BON notée β. Dans β, la matrice U de u est diagonale avec une diagonale positive : $U = Diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. On pose alors $V = Diag(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ diagonale dont la matrice est donnée par une diagonale de racines carrées des valeurs propres de u. L'endomophisme v associé à V est symétrique car sa matrice est symétrique dans la BON considérée. Ses valeurs propres sont positives et $u = v^2$ car $U = V^2$.

6. Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que $sp(S) \subset \mathbb{R}_+$ si et seulement si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $tXSX \geqslant 0$ (on dit alors que S est une matrice symétrique "positive").

Commençons par constater que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $tXSX$ est un nombre réel.

Ensuite, S est symétrique réelle, donc diagonalisable dans une base orthonormée, donc $S =^t ODO$. Alors ${}^tXSX =^t X^tODOX =^t (OX)D(OX)$.

Notons $Y = OX$ de sorte que ${}^tXSX =^t YDY = \sum_{k=1}^n d_{i,i}y_i^2$.

Sens direct : si $sp(S) \subset \mathbb{R}_+$, alors $\forall i, d_{i,i} \geqslant 0$ donc ${}^tXSX =^t YDY = \sum_{k=1}^n d_{i,i}y_i^2 \geqslant 0$ par somme de nombres réels positifs.

Sens réciproque : si $\forall X,^t XSX \geqslant 0$, pour $Y_i =^t (0, \dots, 0, 1, 0 \dots 0)$ et $X_i = O^{-1}Y_i$, on obtient en particulier, ${}^tX_iSX_i =^t Y_iDY_i = d_{i,i} \geqslant 0$.

Donc D est une matrice diagonale à coefficients positifs, donc le spectre de S est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque : *on peut montrer que $sp(S) \subset \mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$* **non nul**, *$tXSX > 0$ (on dit alors que S est une matrice symétrique " définie positive")*

V — Exercices :

1) Exercices CCP :

Exercices 68, 76, 77, 78, 79, 80, 81

2) Exercices complémentaires :

Exercice 1 :

Soit p une projection. Montrer que p est une projection orthogonale $\Leftrightarrow \forall (x, y) \in E, (p(x)|y) = (x|p(y)) \Leftrightarrow \forall x \in E, ||p(x)||_2 \leqslant ||x||_2$.

Exercice 2 :

Orthonormaliser $(1, X, X^2)$ pour le produit scalaire $(P|Q) = \int_{[-1,1]} PQ$. En déduire la distance de X^3 au sous espace $\mathbb{R}_2[X]$.