Révisions 3 : Suite/Série de fonctions

I — Le B.A.BA

1) Définitions théorèmes :

Liste non exhaustive des éléments du cours à maîtriser :

— Définitions de convergence simple, uniforme locale, uniforme d'une suite de fonctions **Exo 9 CCP**.
— Liens entre les différents modes de convergence.
— Définition de convergence simple, uniforme locale, uniforme, normale d'une série de fonctions **Exo 18, 15 CCP**.
— Liens entre les différents modes de convergence.
— Donner des exemples et contre exemples à partir des fonctions $f_n : x \mapsto x^n$ et $g_n : x \mapsto \frac{x^n}{n}$.
— Propriétés qui passent à la limite simple.
— Propriétés qui passent à la limite uniforme **Exo 10, 12, 13 CCP**.
— Théorème d'intégration terme à terme, de dérivation terme à terme.
— Théorème de la double limite finie.
— Théorème de continuité d'une intégrale à paramètre. Théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre (Leibniz)
— Domaine de convergence d'une série entière. Domaine de convergence d'une série entière. Lemme d'Abel.
— Rayon de convergence et relations de comparaison **Exo 20 CCP**.
— Règle de d'Alembert pour les séries entières (en dernier recours...)
— Somme de séries entières **Exo 22 CCP**. Produit (de Cauchy) de séries entières.
— Régularité d'une série entière. Dérivée terme à terme. Primitive.
— Définition de la série de Taylor d'une fonction de classe C^∞. 3 cas possibles.
— DSE usuels.
— Revoir la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle pour en déterminer un développement en série entière.
— Solution d'une équation différentielle développable en série entière : revoir la rédaction par analyse-synthèse !

II — Démonstrations classiques à connaître :

- **(Exo 11 CCP)**Soit X une partie de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f.
  On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur X.
- **(Exo 12 CCP)** Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
  On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f, et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en x_0, avec $x_0 \in [a,b]$.
  Démontrer que f est continue en x_0.
- **(Exo 13 CCP)**Soit (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$, X désignant un ensemble non vide quelconque.
  On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est bornée et que la suite (g_n) converge uniformément sur X vers g.
  Démontrer que la fonction g est bornée.
- **(Exo 14 CCP)**Soit a et b deux réels donnés avec $a < b$.
  Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs réelles.
  Démontrer que si la suite (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers f, alors la suite $\left(\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

- **(Exo 15 CCP)** Démontrer que toute série de fonctions, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, normalement convergente sur X est uniformément convergente sur X.
- **(Exo 17 CCP)**Démontrer l'implication :

$$\left(\text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge uniformément sur } A\right)$$
$$\Downarrow$$
$$(\text{la suite de fonctions } (f_n) \text{ converge uniformément vers 0 sur } A)$$

III — Méthodes :

- Dans ce chapitre en particulier, on **distinguera** les **suites NUMERIQUES** $(f_n(x))$ et les **suites de FONCTIONS** (f_n).
- Pour montrer la convergence simple d'une suite de fonctions (f_n) sur un ensemble X vers une fonction f, on fixe $x \in X$ (quelconque) et on étudie la convergence de la suite numérique $(f_n(x))$ (on peut éventuellement trouver sa limite qui est alors $f(x)$.)
  Dans certains cas, on pourra montrer la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) qui implique alors la convergence simple...
- Pour montrer la convergence uniforme d'une suite de fonctions (f_n) sur un ensemble X vers une fonction f, on évalue la norme uniforme $||f_n - f||_{\infty,X} = \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)|$ et on montre que cette quantité (**indépendante de x !!!**) tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
- Pour montrer qu'une suite de fonctions ne converge pas uniformément vers f, on peut chercher une propriété des f_n qui devrait passer à la limite et qui n'est pas vérifiée par f : par exemple, la continuité ou bien le caractère borné (souvent oublié, mais très utile) ou bien le théorème de la double limite.
- Pour montrer qu'une application, obtenue comme limite d'une suite d'applications est continue, ou bien de classe C^k, on utilise les théorème de passage à la limite qu'on appliquera sur un quelconque **segment** de X : il faudra montrer la convergence uniforme de (f_n) dans le cas continue, ou bien de (f'_n) dans le cas C^1,etc...
- Pour permuter les symboles intégrale et série, on peut utiliser le théorème de convergence uniforme sur un **segment** ou bien le théorème de Beppo-Levi ou bien le théorème de convergence dominée.
- Pour étudier le mode de convergence d'une série de fonctions, on peut essayer de montrer la convergence normale de la série en majorant $||f_n||_{\infty,X}$ par une suite (a_n) positive dont la série est convergente.
- Dans le cas d'une série entière de rayon $R > 0$, il y a convergence normale sur tous les **compacts** $[-a, a]$ avec $a < R$ (attention à l'inégalité **stricte**).
- S'il n'y a pas convergence normale, on étudie s'il y a convergence uniforme sur X en montrant que la suite de fonctions des **restes** $R_n = \sum_{k\geqslant n} f_k$ converge uniformément **vers 0** (la fonction nulle).
- Pour déterminer le rayon de convergence R d'une série entière $\sum a_n x^n$, on cherche un équivalent/une comparaison de $|a_n|$ (en **module**) à une série b_n plus simple et d'une série entière de référence (exponentielle, géométrique, série dérivée, série intégrée...)
- Pour montrer qu'une fonction est développable en série entière, on essaye de se ramener aux DSE de référence par combinaison linéaire, produit, dérivation, primitivation... Si ce n'est pas possible, on peut appliquer la formule de Taylor Intégral et montrer que le reste tend vers 0.
  Dans la cas particulier d'une équation différentielle, on procède par analyse synthèse : d'abord, on suppose qu'il existe $f(x) = \sum a_n x^n$ de rayon strictement positif qui vérifie l'ED et on calcule les coefficients a_n.
  Ensuite, on calcule le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ et on justifie que ce rayon est strictement positif.
  Enfin, on peut utiliser le th. de Cauchy-Lipschitz/ de structure des solutions de l'ED pour conclure si on a trouvé toutes les solutions ou pas.
- Pour transformer une intégrale sous forme d'une série de fonctions, on fait souvent apparaître une série entière et on permute ensuite les symboles série/intégrale par l'un des théorèmes de permutation (convergence uniforme sur un segment, Beppo-Levi ou convergence dominée.)
- Pour transformer une série en une autre série de fonctions, on fait souvent apparaître une série double par l'intermédiaire d'une série entière et on permute ensuite les symboles série/série par le théorème de Fubini (convergence absolue !).
- Pour montrer que l'égalité $f(x) = \sum a_n x^n$ est encore valable à la frontière de l'intervalle de convergence (en R ou en $-R$), on peut montrer que la série de fonctions convergence unifromément au voisinage de R ou de $-R$ (par exemple par majoration du reste du CSSA) et utiliser le théorème de convergence uniforme et de continuité ou le théorème de la double limite.

IV — Interrogations quotidiennes :

Série 1 : au plus tard lundi :

1. Donner la définition d'une suite de fonctions (f_n) qui converge simplement puis uniformément vers une fonction f.
2. Lister les implications entre convergences simple/uniforme sur tout compact/uniforme pour une suite de fonctions.
3. Donner un contre exemple pour $CS \not\Rightarrow CU$.
4. Lister toutes les propriétés vues en cours conservées par la convergence simple d'une suite de fonctions.
5. Montrer que la fonction Γ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ (on rappellera son expression).
6. Déterminer le rayon de la série entière $\sum \sin(n)x^n$
7. Rappeler les formules de changement de bases.

Série 2 : au plus tard mardi :

1. Donner la définition d'une série de fonctions (f_n) qui converge simplement puis uniformément puis normalement vers une fonction f.
2. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
3. Citer le DSE de $\ln(1+x)$ (on précisera le rayon de convergence de la série entière !)
4. Quels sont les modes de convergence de la série de fonctions $\sum \frac{x^n}{n}$ sur $[-1, 1-\varepsilon]$ pour $\varepsilon > 0$?
5. Citer le théorème de la double limite.
6. Citer la caractérisation des fonctions convexes dérivables en terme de position relative de la courbe et ses tangentes.
7. $\sin p + \sin q =?$

Série 3 : au plus tard mercredi :

1. Donner un contre exemple de $CU \not\Rightarrow CN$ pour une série de fonctions (on précisera bien les fonctions et l'intervalle d'étude sinon, cela n'a pas valeur de contre exemple).
2. Citer le DSE de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ en précisant le rayon de convergence
3. Déterminer les primitives de $x \mapsto \tan x$.
4. Donner des conditions suffisantes à la diagonalisabilité d'une matrice carrée. Lesquelles sont nécessaires ?
5. Citer le théorème de dérivation sous le signe intégral de Leibniz.
6. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.

Série 4 : au plus tard jeudi :

1. $\sin(2x) =$
2. Citer la formule du produit de Cauchy avec toutes ses hypothèses.
3. Citer le théorème de convergence dominée.
4. Montrer que pour tout $x > 0$, $\dfrac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$
5. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{n!}{n^n}$
6. Déterminer une primitive de $x \longmapsto \cos^4 x$.

Série 5 : au plus tard vendredi :

1. Citer le DSE de $\arcsin(x)$ en précisant le rayon de convergence

2. Citer le théorème de comparaison série/intégrale et donner en un exemple d'application important.

3. Citer le DSE de $\arctan x$ et préciser son rayon de convergence.

4. On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \in \mathbb{R}_+,\ f_n(x) = \dfrac{(-1)^n\, e^{-nx}}{n}$.

Étudier la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$.

5. Citer le théorème de Stone-Weierstrass. Donner une fonction définie sur $[-1, 1]$ qui est limite uniforme de fonctions C^∞ mais qui n'est pas dérivable en 0.

6. Quels sont les idéaux de $\mathbb{R}[X]$?

Série 6 : au plus tard samedi :

1. Faire un développement en éléments simples de $f(x) = \dfrac{3x+7}{(x+1)^2}$ et en déduire son DSE et son rayon de convergence.

2. Donner le développement limité de $(1+x)^\alpha$

3. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\, \mathrm{d}t = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ en appliquant le th. d'intégration terme à terme de Beppo-Levi (on pourra commencer par montrer que $\dfrac{t}{e^t-1} = \dfrac{te^{-t}}{1-e^{-t}}$).

4.

5. Quel est le polynôme caractéristique de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

6. Rappeler la formule du déterminant de Vandermonde (on écrira la matrice correspondante)

7. Rappeler la définition du polynôme annulateur d'une matrice carrée.

Série 1 : correction

1. Soient $D \subset E$ non vide, (f_n) une suite de fonctions de D dans F et $f : D \to F$. On dit que la suite (f_n) converge vers la fonction f ...

(1) : <u>SIMPLEMENT</u> si $\forall\, x \in D,\ f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$;

(2) : <u>UNIFORMÉMENT</u> s'il existe une suite (ε_n) de limite nulle telle que $\forall\, x \in D,\ \|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \varepsilon_n$;

2. CU $\Rightarrow$ CUC $\Rightarrow$ CS et CU $\Rightarrow$ CLU $\Rightarrow$ CS. Les implications réciproques sont fausses en général.

3. La suite de fonctions (f_n) où $f_n : x \mapsto x^n$ converge simplement mais pas uniformément vers sur $[0, 1]$ vers f telle que $f(x) = 0$ pour $x \neq 1$ et $f(1) = 1$ (qui n'est pas continue...)

4. Une limite simple de fonctions **positives** ou nulles est positive ou nulle.

Une limite simple de fonctions **croissantes** est croissante.

Une limite simple de fonctions **convexes** est convexe.

Une limite simple de fonctions k**-lipschitziennes** est k-lipschitzienne (k constant).

Une limite simple de fonctions **linéaires** est linéaire.

5. Voir semaine 2

6. **On procède par double inégalité :** $(\sin n)$ est une suite bornée, donc $R \geqslant 1$. De plus, $(\sin n)$ n'admet pas de limite (divergente de seconde espèce), donc $\sum \sin n$ est une série qui diverge grossièrement. Donc $R \leqslant 1$.

Par double inégalité, $\sum \sin n x^n$ est une série entière de rayon $R = 1$.

7. Voir semaine 1

Série 2 : correction

1. Soient $D \subset E$ non vide, (f_n) une suite de fonctions de D dans F et $f : D \to F$. On dit que la série $\sum f_n$ converge vers la fonction f ...

(3) : <u>NORMALEMENT</u> s'il y a convergence simple et s'il existe une suite (a_n) réelle positive telle que $\forall\, x \in D$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\|f_n(x)\| \leqslant a_n$ et $\sum_n a_n < +\infty$;

Caractérisation : la série $\sum f_n$ converge normalement si et seulement si chaque fonction f_n est bornée et $\sum_n \|f_n\|_\infty < +\infty$.

(4) : <u>LOCALEMENT NORMALEMENT, NORMALEMENT SUR TOUT COMPACT</u> si la propriété précédente est vraie au voisinage relatif de tout point de D ou sur tout compact inclus dans D (la suite (a_n) peut dépendre du voisinage ou du compact considéré).

(5) : <u>UNIFORMÉMENT</u> si la suite $(\sum_{k=0}^n f_k)$ converge uniformément vers f ;

(6) : <u>LOCALEMENT UNIFORMÉMENT, UNIFORMÉMENT SUR TOUT COMPACT</u> si la suite $(\sum_{k=0}^n f_k)$ converge de cette manière vers f ;

(7) : <u>SIMPLEMENT</u> si $\forall\, x \in D$, $\sum_n f_n(x) = f(x)$;

2. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

Le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ est l'unique élément de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ défini par :
$R = \sup\{r \geqslant 0\, / (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$.
On peut aussi définir le rayon de convergence de la manière suivante :

$\exists\,!\, R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ tel que :
i) $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| < R \Longrightarrow \sum a_n z^n$ converge absolument.
ii) $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| > R \Longrightarrow \sum a_n z^n$ diverge (grossièrement).
R est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.
Remarque : pour une série entière de la variable réelle, la définition est identique.

3. $\ln(1+x) = \sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ en intégrant le DSE de $\dfrac{1}{1+x}$ en partant du DSE de $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n\geqslant 0} x^n$.
Le rayon est égal à 1 (série géométrique dérivée).

4. C'est la contre exemple d'hier, à peine modifié, mais ici, on a "tronqué" en $1-\varepsilon$.
C'est une série entière de rayon $R = 1$: la série de fonctions converge normalement donc uniformément sur tout compact de l'intervalle ouvert de convergence, donc converge normalement sur $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$.

De plus, sur $[-1, 0]$, $x < 0$ et $x^n = (-1)^n |x|^n$. La suite $(|x|^n)/n$ est décroissante vers 0. Par CSSA, la série $\sum \dfrac{(-1)^n |x|^n}{n}$ converge et par majoration du reste, $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{|x|^{n+1}}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ qui est indépendant de x et qui tend vers 0. Donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[-1, 0]$ également.
Finalement, $\sum f_n$ converge uniformément sur $[-1, 1-\varepsilon]$.
Remarque : par contre, $\sum f_n$ ne converge par uniformément sur $[-1, 1[$: en effet, si c'était le cas, les fonctions somme partielle $S_N = \sum_{n=1}^N$ étant bornées (polynômes donc continues sur un segment $[-1, 1]$) la fonction limite devrait être bornée sur $[-1; 1[$, or $\sum f_n = -\ln(1-x)$ qui tend vers l'infini au voisinage de 1.

5. Soient $D \subset E$ non vide, (f_n) une suite de fonctions $D \to F$, f une fonction de D dans F et $a \in \overline{D} \cup \{\pm\infty\}$ tq :

(8) : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell_n$;

(9) : si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément au voisinage de a vers f, c'est à dire qu'il existe V, voisinage relatif de a dans D tel que (f_n) converge uniformément vers f sur V.

Alors il existe $\ell \in E$ tel que $\ell_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$: c'est à dire $\lim\limits_{n\to\infty}(\lim\limits_{x\to a} f_n(x)) = \lim\limits_{x\to a}(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x))(= \ell)$.

6. Une fonction dérivable est convexe ssi toutes les tangentes à sa courbe représentative sont situées en dessus de sa courbe.

$\forall x_0 \in I, \forall y \in I, f(x_0) + (y - x_0) f'(x_0) \leqslant f(y)$ ou bien $\forall x \forall y \neq x, f'(x) \leqslant \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$.

7. $\sin p + \sin q = 2 \sin \dfrac{p+q}{2} \cos \dfrac{p-q}{2}$.
En effet :

$$\begin{aligned}
\sin p+\sin q &= \frac{e^{ip}-e^{-ip}}{2i}+\frac{e^{iq}-e^{-iq}}{2i}\\
&= \frac{1}{2i}\left(e^{ip}+e^{iq}-(e^{-ip}+e^{-iq})\right)\\
&= \frac{1}{2i}\left(e^{i(p+q)/2}\left(e^{i(p-q)/2}+e^{-i(p-q)/2}\right)-e^{-i(p+q)/2}\left(e^{-i(p-q)/2}+e^{+i(p-q)/2}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2i}\left(e^{i(p+q)/2}-e^{-i(p+q)/2}\right)\left(e^{i(p-q)/2}+e^{-i(p-q)/2}\right)\\
&= \sin\frac{p+q}{2}\cdot 2\cos\frac{p-q}{2}\\
&= 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}
\end{aligned}$$

Série 3 : correction

1. **Exemple à connaître :** on peut penser à une "série alternée" de fonctions.
   Soit $g_n(x)=\dfrac{(-1)^n x^n}{n}$. La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} g_n$ CU sur $[0,1]$ par critère spécial des séries alternées. En effet, la suite $\left(\dfrac{x^n}{n}\right)$ est décroissante vers 0, donc $|R_n(x)|\leqslant \dfrac{x^{n+1}}{n+1}\leqslant\dfrac{1}{n+1}$ qui est indépendant de $x\in[0,1]$ et qui tend vers 0.
   Par contre $||g_n||_{\infty,[0,1]}=\dfrac{1}{n}$ qui est le terme général d'une série divergente. Donc $\sum g_n$ ne converge pas normalement sur $[0,1]$.
2. $(1-x^2)^{-1/2}=\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}x^{2n}$ **(Exo 51 CCP)**
   Le rayon de convergence de $(1+x)^\alpha$ est égal à 1 pour $\alpha<0$ d'après le cours.
3. $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}=\dfrac{-u'}{u}$ donc $\int \tan x dx=-\ln|\cos x|$.
4. Pour qu'une matrice carrée M soit diagonalisable, il suffit que :
   — $E=\oplus_{\lambda\in Sp(M)}E_\lambda$ (CNS)
   — $\forall\lambda\in Sp(M), dim(E_\lambda)=r_\lambda$ (CNS)
   — μ_M est scindé à racines simples (CNS)
   — Il existe un polynôme P scindé à racines simples tel que $P(M)=0$ (CNS)
   — χ_M est scindé à racines simples **condition non nécessaire !!!**.
5. Voir semaine 2
6. La série entière $\sum x^n$ est de rayon de convergence $R=1$ donc cette série de fonctions converge normalement et donc uniformément sur le compact $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]\subset\,]-1,1[$.
   De plus, $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $x\longmapsto x^n$ est continue sur $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$.
   On en déduit alors, en utilisant le théorème d'intégration terme à terme de convergence uniforme sur un compact, que : $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}x^n\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}\frac{1}{2^{n+1}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{2^n}$.

Série 4 : correction

1. $\sin(2x)=2\sin x\cos x$
2. si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont des séries complexes absolument convergentes alors $\sum c_n$
   avec $c_n=\sum_{p+q=n}a_p\cdot b_q$ l'est aussi et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}c_k=\left(\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty}b_k\right)$.
3. Voir semaine 2
4. C'est une inégalité. Elle relie les fonctions $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ et $x\mapsto\ln(x)$ (dérivée et primitive l'une de l'autre...)
   On pense à l'inégalité des accroissements finis à appliquer la fonction $x\mapsto\ln x$ sur l'intervalle $[x,x+1]$; $m=\min_{t\in[x,x+1]}\ln'(t)=\dfrac{1}{x+1}$ et $M=\max_{t\in[x,x+1]}\ln'(t)=\dfrac{1}{x}$.
   Alors $m((x+1)-x)\leqslant\ln(x+1)-\ln(x)\leqslant M((x+1)-x)$.

5. On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n > 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n^n}{(n+1)^n} = \mathrm{e}^{-n\ln(1+\frac{1}{n})}$.

Or $-n\ln(1+\dfrac{1}{n}) \underset{+\infty}{\sim} -1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \mathrm{e}^{-1} < 1$.

Donc $\sum u_n$ converge par la règle de d'Alembert des séries numériques.

6. En linéarisant $\cos^4 x$, on obtient $\cos^4 x = \dfrac{1}{8}\left(\cos(4x) + 4\cos(2x) + 3\right)$.

Donc, $x \longmapsto \dfrac{1}{32}\sin(4x) + \dfrac{1}{4}\sin(2x) + \dfrac{3}{8}x$ est une primitive de $x \longmapsto \cos^4 x$.

Série 5 : correction

1. Pour $x \in]-1,1[$, $\arcsin x = x + \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times 2n}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ qui se déduit en intégrant le DSE de $(1-x^2)^{-1/2} = \sum_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}x^{2n}$ **(Exo 51 CCP)**

Le rayon est égal à 1 comme pour tous les $(1+x)^\alpha$ **d'après le cours**.

2. Voir semaine 2. **Applications importantes du th. de comparaison série/intégrale :**

— le critère des séries de Riemann (au programme) en l'appliquant aux fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$

— le critère des série de Bertrand (hors programme) en l'appliquant aux fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln(t)^\beta}$

— $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$

3. Pour tout $x \in]-1,1[$, $\arctan(x) = \sum_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{2n+1}x^{2n+1}$ en intégrant le DSE de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.

Le rayon est aussi égal à 1 même si la fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$...

4. Pour $x \geqslant 0$ et par critère spécial des séries alternées (vérifier les hypothèses), $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$,

on peut poser $\forall\, x \in [0,+\infty[,\ R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$.

Alors, comme, $\forall\, x \in [0,+\infty[$, $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = 0$, on en déduit, par majoration du reste d'une série alternée, que :

$\forall\, x \in [0,+\infty[,\ |R_n(x)| \leqslant \dfrac{e^{-(n+1)x}}{n+1}$.

Et donc $\forall\, x \in [0,+\infty[,\ |R_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. (majoration indépendante de x)

Et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, alors (R_n) converge uniformément vers 0 sur $[0,+\infty[$.

C'est-à-dire $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$.

5. Soit f continue sur le segment $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors il existe une suite de fonctions polynomiales (P_n) telle que $||P_n - f||_{\infty,[a,b]} \longrightarrow 0$ (la suite (P_n) converge uniformément vers f sur le segment $[a,b]$.)

La fonction valeur absolue est continue sur $[-1,1]$, donc est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales. Pourtant, elle n'est pas dérivable en 0.

6. Les idéaux de $\mathbb{R}[X]$ sont monogènes, c'est à dire exactement les idéaux de la forme $(P_0) = P_0\mathbb{R}[X] = \{$multiples de $P_0\} = \{P_0 \times Q | Q \in \mathbb{R}[X]\}$.

la démonstration devrait être travailée/connue : on procède par division euclidienne et on utilise le statut minimal de P_0 en terme de degré (non nul).

Série 6 : correction

1. On trouve $f(x) = \dfrac{3}{x+1} + \dfrac{4}{(x+1)^2}$. Les deux fractions sont développables en séries entières par théorèmes opératoires toutes les deux avec un rayon égal à 1. Donc f l'est aussi avec un rayon $R \geqslant 1$.

Alors $\forall\, x \in \,]-1,1[,\ f(x) = 3\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n + 4\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(n+1)x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(4n+7)(-1)^n x^n$.

Comme cette série diverge gorssièrement en $x = 1$, le rayon est finalement inférieur, donc égal à 1.

2. Voir semaine 2

3. Voir semaine 2

4. Voir semaine 1

5. Voir semaine 1

6. Voir semaine 1

V — Exercices :

1) Exercices d'échauffement :

(10) : Série "alternée" de fonctions **Exo 8 CCP**
(11) : Convergences **Exo 11, 17, 53 CCP**
(12) : Convergence uniforme et intégration **Exo 14 CCP**
(13) : Convergence et dérivation **Exo 16 CCP**
(14) : Convergence dominée **Exos 26, 27 CCP**
(15) : Calcul intégral par équation différentielle **Exo 30 CCP**

2) Exercices d'approfondissement :

Exercice 1 : Convergences

(1) : *Montrer que la suite de fonctions $f_n : x \mapsto \exp(-nx)\sin(nx)$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$, que la convergence est uniforme sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$ $(a > 0)$ mais qu'elle n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$.*

(2) : *Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = (-1)^n \dfrac{x}{n^2+x^2}$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}_+$ mais n'est pas normalement convergente.*
Étudier la limite de sa somme lorsque x tend vers $+\infty$.
Démontrer que sa somme est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 2 : Somme d'une série entière par équation différentielle

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\binom{2n}{n}\dfrac{1}{2n-1}x^n$. Déterminer le rayon de convergence de f. Montrer que $2f = (1+4x)f'$ et en déduire f.

Exercice 3 : Série entière et dénombrement

Étant donné un entier naturel non nul n et un ensemble fini à n élements E, on note a_n le nombre de bijections de E dans E sans point fixe. On pose par convention $a_0 = 1$.

(1) : *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n! = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_{n-k}$ en dénombrant les bijections de E dans E en discutant du nombre de leurs points fixes.*

(2) : *On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{a_n}{n!}x^n$. Démontrer que cette série entière admet un rayon de convergence non nul et donner une expression algébrique de la fonction $x \mapsto \exp(x)\cdot f(x)$.*

(3) : *En déduire la valeur de a_n et la limite de $\dfrac{a_n}{n!}$ lorsque n tend vers $+\infty$.*
Donner une interprétation de ce résultat en termes de probabilité.

VI — Problème(s).