# Révisions 2 : Analyse réelle

## I — Le B.A.BA

**1) Définitions théorèmes :**

Liste non exhaustive des éléments du cours à maîtriser :

- **Chapitre fonctions de la variable réelle de MP :**

— Dérivation de $f : \mathbb{R} \to E$ où $E$ est un $\mathbb{K}$-evn de dimension finie. $DL_1(a)$ de $f$. Vecteur dérivé $f'(a)$. Dérivation des fonctions composantes.

— Soit $f : \mathbb{R} \to E$ dérivable en $a$. Soit $L$ linéaire de $E$ dans $F$, $B$ bilinéaire de $E^2$ dans $F$. Dérivation de $L \circ f$ en $a$. Dérivation de $B(f, g)$ en $a$.

— Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en $a$ et $f : \mathbb{R} \to E$ dérivable en $\phi(a)$. Dérivation de $f \circ \phi$ en $a$.

— Formulaire de dérivation et de primitive.

- **Chapitre intégration et fractions rationnelles de MPSI :**

— Revoir la linéarisation pour intégrer une fonction. Exemple : primitiver $x \mapsto \sin^2(x)\cos^3(x)$.

— Revoir la méthode de décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ pour intégrer une fraction rationnelle qui se décompose de manière unique sous la forme :
$\frac{P}{Q} = A + \frac{\alpha_1}{X-\alpha} + \cdots + \frac{\alpha_n}{(X-\alpha)^n} + \frac{a_1X+b_1}{X^2+aX+b} + \cdots + \frac{a_mX+b_m}{(X^2+aX+b)^m} + \ldots$.
$A$ est un polynôme, (partie entière de la fraction rationnelle qui s'obtient en effectuant la division euclidienne de P par Q ).
Pour obtenir les autres coefficients, on peut en dernier ressort tout réduire au même dénominateur et identifier les coefficients.
Une fois la DES obtenue, il suffit alors de savoir intégrer chacun de ses termes :
$\int \frac{dx}{x-\alpha} = \ln|x-\alpha|$. $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n} = \frac{(x-\alpha)^{-n+1}}{-n+1}$ si $n \neq 1$.
Pour calculer $\displaystyle\int \frac{\alpha x+\beta}{x^2+ax+b}dx$, on se ramène à
$\int \frac{2x+a}{x^2+ax+b}dx = \ln|x^2+ax+b|$, $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$.
en écrivant que : $\int \frac{\alpha x+\beta}{x^2+ax+b}dx = \frac{\alpha}{2}\int \frac{2x+a}{x^2+ax+b}dx + \int \frac{\beta-\alpha a/2}{x^2+ax+b}dx$.
Pour la première intégrale, on a directement la bonne forme. Pour la deuxième, il suffit de mettre le dénominateur sous forme canonique.
Plus généralement, pour $\frac{\alpha x+\beta}{(x^2+ax+b)^n}dx$ : en procédant comme ci-dessus, on se ramène au calcul de 2 intégrales :
$\int \frac{2x+a}{(x^2+ax+b)^n}dx = \frac{(x^2+ax+b)^{-n+1}}{-n+1}$, et $I_n = \int \frac{du}{(u^2+1)^n}$.
En réalisant une intégration par parties par exemple, on peut trouver une formule de récurrence liant les $I_n$ et calculer effectivement leurs valeurs explicites.
Exemple : primitiver $x \mapsto \frac{2x^4+3x^3+5x^2+17x+30}{x^3+8}$

— Primitives de $x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$ ou $x \mapsto e^{ax}\sin bx$.

— Primitives d'une fraction rationnelle $F$ en cos ou sin. On peut essayer $t = \cos x, \sin x$ ou $\tan x$. En dernier recours, on pose $t = \tan(x/2)$. Alors $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$ et $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.
Exemple : $\int \frac{dt}{\cos t} = \ln|\tan(x/2+\pi/4)| = \frac{1}{2}\ln|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}|$ ou bien $\int \frac{dt}{\sin t} = \ln|\tan(x/2)|$

- **Chapitre dérivation de MPSI et fonctions de la variable réelle de MP :**

— Énoncer le théorème de l'extremum pour une fonction de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ puis pour une fonction de $U \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

— Énoncer le théorème de Rolle pour une fonction de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Est-il valable pour une fonction à valeur dans $\mathbb{R}^n$ ?

— Énoncer l'égalité des accroissements finis pour une fonction de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Est-elle valable pour une fonction à valeur dans $\mathbb{R}^n$ ?

— Énoncer l'inégalité des accroissements finis pour une fonction de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Est-elle valable pour une fonction à valeur dans $\mathbb{R}^n$ ?

— Citer le théorème du prolongement dérivable. Donner l'exemple d'une fonction dérivable mais pas de classe $C^1$. **Exo 4 CCP**

— Définir une fonction convexe sur $I \subset \mathbb{R}$. Rappeler la caractérisation par l'inégalité des pentes puis celle par la position relative des cordes, de la courbe et des tangentes. Rappeler la caractérisation des fonctions convexes de classe $C^2$.

- **Chapitre fonctions de la variable réelle de MP**

— Citer le théorème des sommes de Riemann.

— Citer les formules de Taylor. Formulaire des développement limités usuels

— Citer le théorème de Stone et Weierstrass.

- **Chapitre Séries numériques de MPSI et de MP**

— Citer les théorèmes de comparaison des séries numériques à termes positifs. Donner le théorème de comparaison des sommes partielles ou des restes de séries.

— Démontrer le critère spécial des séries numériques alternées **Exos 8 et 26 CCP**.

— Citer le théorème de comparaison d'une série et d'une intégrale **Exo 7 CCP**. En déduire les critères de convergence des séries Riemann et des séries de Bertrand **Exo 5 CCP** .

— Citer la règle de D'Alembert pour les séries numériques **Exo 6 CCP**.

— Citer le théorème de permutation des termes d'une série.

— Donner la définition d'une série double convergente. Citer le théorème de Fubini pour les séries doubles. Citer la formule du produit de Cauchy pour les séries doubles.

- **Chapitre intégration de MP**

— Définir une fonction intégrable sur $I$, une intégrale généralisée sur $I$, une intégrale faussement impropre.

— Rappeler les critère de Riemann à distance finie et à distance infinie.

— Citer la formule d'intégration par parties et de changement de variable bijectif pour une intégrale généralisée.

— Citer les théorèmes de comparaison d'intégrales de fonctions positives.

- **Chapitres intégration de MP et séries de fonctions de MP**

— Citer le théorème d'intégration terme à terme de Beppo Levi.

— Citer le(s) théorème(s) de convergence dominée (paramètre discret puis continu).

— Citer les théorèmes de continuité et de dérivabilité de Leibnitz d'une intégrale à paramètre.

## II — Démonstrations classiques à connaître :

— Montrer que pour $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ réels strictement positifs, $\sqrt[n]{x_1\cdots x_n} \leqslant \dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n}$.

— Dériver $G : x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ par rapport à $x$ **Exo 56 CCP**.

— Démontrer la formule de Taylor Intégral.

— Soit $f$ continue sur $[0,1]$. Montrer que si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 f(x)x^n\,\mathrm{d}x = 0$, alors $f$ est nulle **Exo 48 CCP**.

— Énoncer et démontrer le lemme de Cesàro.

— Montrer que $H_n = \ln(n) + \gamma + \dfrac{1}{2n} + o(1/n)$.

— Montrer que $\sum_{p,q} \dfrac{1}{p^\alpha + q^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 2$.

— Étude de la fonction $\Gamma$ (relation fonctionnelle, variations, limites, convexité).

— Montrer la semi-convergence de l'intégrale de Dirichlet $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

## III — Méthodes

- Pour étudier la convergence d'une série, on commence par étudier son éventuelle absolue convergence (attention : c'est une condition suffisante, mais pas nécessaire).
- Pour montrer qu'une série à termes positifs converge, on peut :
  1. identifier une série classique (géométrique, exponentielle, télescopique, de Riemann, de Bertrand)
  2. simplifier l'expression de $u_n$ en trouvant un équivalent (par un développement limité) et utiliser un théorème de comparaison des séries à termes positifs en majorant $u_n$ par $v_n$ qui est le terme général d'une série positive convergente.

3. démontrer que les sommes partielles sont majorées par exemple par comparaison avec une intégrale d'une fonction monotone positive.
4. utiliser le critère de d'Alembert si les termes ne s'annulent pas et sont composés de puissances ou factorielles.

- Pour montrer qu'une série diverge, on peut
  1. montrer que $u_n$ ne tend pas vers 0 (divergence grossière)
  2. simplifier l'expression de $u_n$ en trouvant un équivalent (par un développement limité) et utiliser un théorème de comparaison des séries à termes positifs en minorant $u_n$ par $v_n$ qui est le terme général d'une série positive divergente.
  3. utiliser le critère de d'Alembert.
- Pour étudier la nature d'une série qui n'est pas absolument convergente, on peut
  1. utiliser le critère spécial des séries alternées ($(|u_n|)_{\mathbb{N}}$ est une suite décroissante vers 0)
  2. utiliser un développement limité de $u_n = v_n + O(w_n)$, avec $\sum w_n$ absolument convergente. Alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.
- Pour encadrer des sommes finies ou infinies du type $\sum f(n)$ , dans le cas où $f$ est monotone, on peut utiliser un encadrement de $f(n)$ par $\int_n^{n+1} f(t)dt$ et $\int_{n-1}^{n} f(t)dt$ , sommer les intégrales par la relation de Chasles, et calculer l'intégrale correspondante.
- Pour majorer un reste d'une série alternée, on peut écrire que $|R_n| \leqslant |u_n + 1|$
- Pour avoir un équivalent des sommes partielles d'une série divergente ou du reste d'une série convergente d'une série à termes positifs, on peut sommer les relations de comparaison $\sim, oetO$.
- Pour montrer qu'une famille double $(a_{p,q})_{\mathbb{N}^2}$ est sommable il suffit de montrer que la série double $\sum_p \sum_q |a_{p,q}|$ est convergente.
- Pour permuter des sommes doubles (Fubini) ou utiliser les sommes en diagonale, il suffit de vérifier l'absolue convergence de la série double.
- Pour utiliser la formule du produit de Cauchy $\left(\sum_p a_p\right)\left(\sum_q b_q\right) = \sum c_n$ avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, il suffit que les deux séries simples convergent absolument.
- Pour étudier une intégrale impropre $\int_I f$ :
  1. on étudie la continuité (par morceaux) de $f$ sur $I$.
  2. à distance finie, on étudie l'existence d'un éventuel prolongement par continuité (intégrale faussement impropre)
  3. si on connait une primitive de $f$, on étudie la convergence du crochet généralisé.
  4. si on a affaire à une intégrale de référence (Riemann, Bertrand), on conclut en utilisant les critères du cours à distance finie ou à distance infinie.
  5. sinon, on étudie la convergence absolue en simplifiant $|f|$ par un développement limité ou une majoration par une fonction intégrable au voisinage de la borne étudiée et on utilise le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives.
  6. si l'intégrale n'est pas absolument convergente, on peut essayer une intégration par parties par exemple pour l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.
- Pour déterminer un équivalent du reste d'une intégrale convergente ou de la somme partielle d'une intégrale divergente d'une fonction positive, on peut utiliser le théorème d'intégration des relations de comparaison.

**IV — Interrogations quotidiennes :**

# Série 1 (lundi au plus tard)

1. Combien vaut la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$ ?
2. $\cos p - \cos q = ?$
3. Citer la définition d'une fonction convexe sur un intervalle $I$.
4. Citer le critère des séries alternées. Illustrer le phénomène par un dessin. Donner les étapes de sa démonstration.

5. Citer le théorème de Rolle.

6. Citer la formule des sommes de Riemann avec ses hypothèses. Quelle est la limite de $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{\sqrt{4n^2-k^2}}$ ?

*Avez vous pensé à préciser la majoration du reste de la série dans la question 3 !?*

## Série 2 (mardi au plus tard)

1. Développement limité de $(1+x)^\alpha$

2. Donner la formule du produit de Cauchy avec ses hypothèses **suffisantes** de validité !

3. Quelles sont la nature et la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\exp(-at)\cos(bt)\,\mathrm{d}t$ pour $a>0$ ? Pour le calcul, on pourra utiliser une intégrale complexe.

4. Citer l'égalité des accroissements finis pour une fonction de $I\subset\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Illustrer le phénomène.
   Est-elle encore valable pour une fonction de $I\subset\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ ? si non, donner un contre exemple.

5. Citer le théorème du prolongement dérivable. Quelle est la classe de la fonction $f : x\mapsto x^2\sin(1/x)$ prolongée en 0 en posant $f(0)=0$

6. Citer le théorème de comparaison séries/intégrales. En déduire que la série de Bertrand de terme général $u_n=\dfrac{1}{n(\ln n)^2}$ converge.

## Série 3 (mercredi au plus tard)

1. Primitives de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ?

2. Donner la caractérisation d'une fonction convexe sur un intervalle $I$ par les inégalités des trois pentes. Illustrer le phénomène.

3. Citer les théorèmes de comparaison des séries numériques. Donner aussi les énoncés pour la comparaison des sommes partielles de séries divergentes et des restes de séries convergentes.

4. Citer le théorème de permutation série/intégrale de Beppo-Levi

5. Citer l'inégalité des accroissements finis pour une fonction de $I\subset\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Est-elle encore valable pour une fonction de $I\subset\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ ? si non, donner un contre exemple.

6. Quelle est la nature de la série de terme général : $u_n=\dfrac{sh(1/n^2)\cos(1/n)}{\tan(1/n)}$ ? même question pour $v_n=\dfrac{\mathrm{sh}(1/n)}{\ln(n)^2}$ ?

## Série 4 (jeudi au plus tard)

1. Compléter : "Soient $I,J$ intervalles, $u,v\in C^1(???,???)$ et $f$ continue sur ???, alors $g : x\mapsto\displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)}f(t)dt$ est ??? et $g'(x)=$??? "

2. A-t-on : "si $u_n\sim v_n$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature" ? Si oui, le démontrer, si non, quelle hypothèses doit-on ajouter (et sauriez vous donner un contre exemple ?).

3. Citer le théorème de convergence dominée.

4. Citer les critères de Riemann à distance finie puis à distance infinie pour les intégrales.

5. Montrer que $H_n=\ln n+\gamma+o(1)$. On montrera que la suite $(H_n-\ln n)$ admet vers une limite finie en utilisant le théorème de comparaison séries/intégrales à la fonction $t\mapsto 1/t$.

6. Rappeler son expression, puis montrer que la fonction $\Gamma$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour les plus courageux, montrer qu'elle est $C^1$ et même $C^\infty$ sur cet intervalle.

## Série 5 (vendredi au plus tard)

**1.** Citer la formule de Taylor avec reste intégral. Comment peut-on la démontrer ?

**2.** Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente (on pourra faire une IPP au voisinage de $+\infty$).

**3.** Citer le théorème de Rolle.
En appliquant le th. de Rolle en cascade (on fera une récurrence propre), montrer que si $f$ est une fonction de classe $C^n$ qui admet au moins $(n+1)$ zéros distincts sur $[a,b]$, il existe $c \in ]a,b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

**4.** Calculer la limite de $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^n(t)\,\mathrm{d}t$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ en utilisant le théorème de convergence dominée.

**5.** Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ en appliquant le th. d'intégration terme à terme de Beppo-Levi (on pourra commencer par montrer que $\dfrac{t}{e^t-1} = \dfrac{te^{-t}}{1-e^{-t}}$).

## Série 6 (samedi au plus tard)

**1.** Quelles sont les intégrales convergentes ?

a $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$

b $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t}}$

c $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{dt}{t^{3/2}}$

d $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt[3]{t-1}}$

**2.** $\cos x \cos y = ?$

**3.** Nature et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\exp(-\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ à l'aide d'un changement de variable généralisé à justifier.

**4.** Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \exp(-t)\,\mathrm{d}t$ à l'aide d'une IPP généralisée à justifier.

**5.** Si $\sum u_n$ est une série convergente, montrer que $u_n \longrightarrow 0$.
Déterminer une fonction $f$ continue sur $[0, +\infty[$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ est convergente, mais $f$ ne tend pas vers 0 au voisinage de $+\infty$.

**6.** Montrer que si $f$ et $g$ sont de carrés intégrables sur $I$, alors le produit $fg$ est intégrable sur $I$ (on pourra majorer $|fg|$...).

# corrections :

## Série 1

**1.** Combien vaut la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$ ? *C'est une série géométrique de raison 1/3 de module strictement inférieur à 1, donc convergente. Mais la série commence à $n = 1$. On factorise par le premier terme et on obtient :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1/3}{1-1/3} = \frac{1}{2}$$

**2.** $\cos p - \cos q = 2 \sin \dfrac{p-q}{2} \sin \dfrac{p+q}{2}$
*formule de trigonométrie qu'on peut retrouver si on a oublié par le calcul*

$$\left(\frac{e^{ip}+e^{-ip}}{2}\right)-\left(\frac{e^{iq}+e^{-iq}}{2}\right)=\frac{(e^{ip}+e^{iq})-(e^{-ip}+e^{-iq})}{2}=\left(\frac{z-\overline{z}}{2}\right)$$
$$=\mathrm{Im}(z)=\mathrm{Im}(e^{ip}-e^{iq})$$
$$=\mathrm{Im}\left(e^{i\frac{p+q}{2}}(e^{i\frac{p-q}{2}}-e^{-i\frac{p-q}{2}})\right) \text{ par méthode de l'arc moitié}$$
$$=\mathrm{Im}(e^{i\frac{p+q}{2}})2\sin\frac{p-q}{2}$$
$$=2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

*Cette transformation permet de faire une étude de signe de l'expression (produit des signes).*

**3.** Citer la définition d'une fonction convexe sur un intervalle $I$.

*Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que $f$ est convexe sur $I$ si et seulement si :*

$$\forall (x_1,x_2)\in I^2, \forall \lambda\in[0,1], f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leqslant \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2).$$

*On dit que $f$ est concave si et seulement si $-f$ est convexe.*

**4.** Citer le critère des séries alternées. Illustrer le phénomène par un dessin. Donner les étapes de sa démonstration.

*Soit $(u_n)$ une suite réelle positive décroissante de limite nulle.*

(1) : *La série $\sum(-1)^n u_n$ est convergente.*

(2) : *Deux sommes partielles successives encadrent la somme complète.*

(3) : *Soit $R_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k u_k$. Alors $R_n$ est du signe de $(-1)^{n+1}$ et $|R_n|\leqslant u_{n+1}$.*

(4) : *Le signe de la somme de la série est celui du premier terme de la série.*

*Pour démontrer ce théorème, on montre que les suites $(S_{2n})$ et $(S_{2n+1})$ de sommes partielles sont adjacentes (l'une croissante, l'autre décroissante et la différence des deux tend vers 0).*

**5.** Citer le théorème de Rolle.

*Soit $f$ continue sur $[a,b]$* **à valeurs réelles** *et dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a)=f(b)$. Alors il existe $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.*

*Ce théorème n'est plus valable pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Par exemple, la fonction $f : t\mapsto(\cos t,\sin t)$ est $C^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ et $f(0)=f(2\pi)$, mais sa dérivée $f' : t\mapsto(-\sin t,\cos t)$ ne s'annule jamais (son vecteur dérivée est toujours de norme 1).*

**6.** Citer la formule des sommes de Riemann. Quelle est la limite de $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{\sqrt{4n^2-k^2}}$ ?

*Si $f$ est continue par morceaux sur l'intervalle $[a,b]$ alors, en notant $a_i=a+i\frac{b-a}{n}$ :*

$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f(a_i)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\dfrac{1}{b-a}\int_{[a,b]}f$ *et* $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(a_i)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\dfrac{1}{b-a}\int_{[a,b]}f$

*Ici, on pose $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$. La fonction $f$ est continue sur $[0,1]$, donc par théorème des sommes de Riemann,*

$u_n=\dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\dfrac{k}{\sqrt{4n^2-k^2}}=0+\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k/n}{\sqrt{4-(k/n)^2}}=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(k/n)\longrightarrow\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\left[-\sqrt{4-x^2}\right]_0^1=2-\sqrt{3}$

# Série 2

**1.** Développement limité en 0 à l'ordre $n$ de $(1+x)^\alpha$

$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+O(x^{n+1})$

**2.** Donner la formule du produit de Cauchy avec ses hypothèses **suffisantes** de validité !

*si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont des séries complexes absolument convergentes alors $\sum c_n$*

*avec $c_n=\sum_{p+q=n}a_p\cdot b_q$ l'est aussi et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}c_k=\left(\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty}b_k\right)$.*

**3.** Quelle sont la nature et la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\exp(-at)\cos(bt)\,\mathrm{d}t$ pour $a>0$ ?

*La fonction $t\mapsto\exp(-at)\cos(bt)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et $0\leqslant|\exp(-at)\cos(bt)|\leqslant\exp(-at)=o(\frac{1}{t^2})$ par croissances comparées.*

*Par critère de Riemann à distance infinie, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ est convergente car $2>1$.*

*Donc par théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, $f$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc sur $[0,+\infty[$.*
*Enfin,* $I = \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{(-a+ib)t}\,\mathrm{d}t\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{a-ib}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{a+ib}{a^2+b^2}\right) = \frac{a}{a^2+b^2}$

**4.** Citer l'égalité des accroissements finis pour une fonction de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Est-elle encore valable pour une fonction de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ ? si non, donner un contre exemple.
*L'égalité des accroissements finis est la généralisation du théorème de Rolle.*
*Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$.*
*On suppose que $f$ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.*
*Alors $\exists\, c \in ]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.*
*Ce théorème, comme celui du théorème de Rolle, n'est plus valable pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Par exemple, la fonction $f : t \mapsto (\cos t, \sin t)$ est $C^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ et $f(0) = f(2\pi)$, mais sa dérivée $f' : t \mapsto (-\sin t, \cos t)$ ne s'annule jamais (son vecteur dérivée est toujours de norme 1).*

**5.** Citer le théorème du prolongement dérivable. Quelle est la classe de la fonction $f : x \mapsto x^2 \sin(1/x)$ prolongée en 0 en posant $f(0) = 0$
*Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in ]a,b[$.*
*On suppose que $f$ est continue sur $[a,b]$ et que $f$ est dérivable sur $]a,x_0[$ et sur $]x_0,b[$.*
*Si de plus $f'$ admet une limite finie en $x_0$, alors $f$ est dérivable en $x_0$ et $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$.*
*La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (en particulier en 0), mais n'est pas de classe $C^1$).* **Voir Exo 4 CCP**

**6.** Citer le théorème de comparaison séries/intégrales. En déduire que la série de Bertrand de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.
*Soit $f : [a,+\infty[ \to \mathbb{R}$ continue par morceaux, positive décroissante.*
*On pose $F(x) = \int_{[a,x]} f$ et $\int_{[a,+\infty[} f = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) \in [a,+\infty]$.*
(5) : *La série de terme général $f(n) - \int_{[n,n+1]} f$ est convergente et sa somme est majorée par $f(a)$.*
(6) : *$\sum f(n)$ converge $\Longleftrightarrow F$ est majorée $\Longleftrightarrow \int_{[a,+\infty[} f$ est une valeur finie.*
*Or $f : x \mapsto \dfrac{1}{x(\ln x)^2}$ est décroissante sur $[2,+\infty[$ et $f$ est la dérivée de $F : x \mapsto -\dfrac{1}{\ln x}$ qui est majorée sur $[2,+\infty[$.*
*Donc par théorème de comparaison séries/intégrales, la série $\sum \frac{1}{n(\ln n)^2}$ est convergente !*

# Série 3

**1.** Primitives de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ?
arcsin $+cst$

**2.** Donner la caractérisation d'une fonction convexe sur un intervalle $I$ par les inégalités des trois pentes.
*$f$ est convexe si et seulement si pour tous $(a,b,c) \in I^3$ avec $a < b < c$, on a*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(c)-f(b)}{c-b}.$$

**3.** Citer les théorèmes de comparaison des séries numériques. Donner aussi les énoncés pour la comparaison des sommes partielles de séries divergentes et des restes de séries convergentes.
**Natures :**
(7) : *Si $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ pour tout $n$, alors $0 \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$ (dans $[0,+\infty]$).*
*En particulier, si $\sum u_n$ diverge, $\sum v_n$ diverge aussi et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge aussi.*
(8) : *Si $(u_n)$ et $(v_n)$ sont des suites à termes positifs telles que $u_n = O(v_n)$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.*
(9) : *Si $(u_n)$ et $(v_n)$ sont des suites à termes positifs telles que $u_n = o(v_n)$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.*
(10) : *Si $(u_n)$ et $(v_n)$ sont des suites à termes positifs telles que $u_n \sim v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.*
**Comparaison des sommes partielles et restes :**
*Soient $(u_n)$ une suite vectorielle, $(v_n)$ une suite réelle positive. On suppose $u_n = O(v_n)$ (resp. $u_n = o(v_n)$, $u_n \sim v_n$).*

*(i)* *Si* $\sum v_n$ *converge alors* $\sum u_n$ *converge aussi et* $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$ *(resp.* $o$*,* $\sim$*).*

*(ii)* *Si* $\sum v_n$ *diverge alors* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = O\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$ *(resp.* $o$*,* $\sim$*).*

**4.** Citer le théorème de permutation série/intégrale de Beppo-Levi

*On rappelle que ce théorème ressemble beaucoup au théorème de Fubini (permutation de deux sommes discrètes) : il faut donc une hypothèse du type "convergence absolue" :*

*Soit* $(g_n)$ *une suite de fonctions de* $I$ *dans* $E$ *continues par morceaux et* $g : I \to E$ *continue par morceaux telle que pour tout* $x \in I$ : $g(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} g_k(x)$ *(convergence simple).*

*Si* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \int_I |g_k| < +\infty$ *alors* $g$ *est intégrable sur* $I$ *et* $\displaystyle\int_I g = \sum_{k=0}^{\infty} \int_I g_k$.

**5.** Citer l'inégalité des accroissements finis pour une fonction de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Est-elle encore valable pour une fonction de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ ? si non, donner un contre exemple.

*Soit* $f$ *continue sur* $[a, b]$*, dérivable sur* $]a, b[$ *telle que* $\|f'(x)\| \leqslant k$ *pour tout* $x \in ]a, b[$.

*Alors* $\|f(b) - f(a)\| \leqslant k(b - a)$.

*Cette inégalité est encore vraie pour des fonctions à valeurs dans* $\mathbb{R}^2$.

**6.** Quelle est la nature de la série de terme général : $u_n = \dfrac{sh(1/n^2)\cos(1/n)}{\tan(1/n)}$ ? même question pour $v_n = \dfrac{\mathrm{sh}(1/n)}{\ln(n)^2}$ ?

$0 \leqslant u_n \sim \dfrac{1}{n}$. *Or* $\sum 1/n$ *est divergente par critère de Riemann (série harmonique). Donc par théorème de comparaison de séries à termes positifs,* $\sum u_n$ *est divergente.*

*Par contre,* $0 \leqslant v_n \sim \dfrac{1}{n(\ln n)^2}$ *et d'après le théorème de comparaison séries/intégrales, cette expression est le terme d'une série convergente (voir l'interrogation d'hier).*

*Donc* $\sum v_n$ *est convergente par théorème de comparaison de séries à termes positifs.*

## Série 4

**1.** Soient $I, J$ intervalles, $u, v \in C^1(?, ?)$ et $f$ continue sur ?, alors $g : x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$ est ? et $g'(x) = ?$

*si* $u$ *et* $v$ *sont de classe* $C^1(I, J)$ *et* $f$ *est continue sur* $J$*,* $G : x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ *est de classe* $C^1(I, \mathbb{R})$ *et*

$$G'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x)).$$

**2.** A-t-on : "si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature" ? Si oui, le démontrer, si non, quelle hypothèses doit-on ajouter (et sauriez vous donner un contre exemple ?).

*NON : mais il suffit d'ajouter l'hypothèse* $0 \leqslant u_n$ *à partir d'un certain rang pour obtenir la conclusion.*

*Contre exemple :* $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ *et* $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1}{n \ln n}$.

*Alors* $\sum u_n$ *converge par critère spécial des séries alternées.*

*Par contre,* $\sum v_n$ *est divergente car somme d'une série convergente (série alternée) et d'une série divergente (série de Bertrand).*

**3.** Citer le théorème de convergence dominée.

*Soit* $(f_n)$ *une suite de fonctions de* $I$ *dans* $\mathbb{R}$ *continues par morceaux,* $f : I \to \mathbb{R}$ *continue par morceaux et* $\varphi : I \to \mathbb{R}$ *continue par morceaux telles que :*

*(i)* $\forall x \in I,\ f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ ;

*(ii)* $\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N},\ |f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$ ;

*(iii)* $\displaystyle\int_I \varphi < +\infty$.

*Alors les* $f_n$ *et* $f$ *sont intégrables et on a* $\displaystyle\int_I f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_I f$ .

**4.** Citer les critères de Riemann à distance finie puis à distance infinie pour les intégrales.

(11) : ***Distance finie :*** *si $a$ est fini et $f(t) \sim \frac{\lambda}{(t-a)^\alpha}$ avec $\lambda \neq 0$ alors $\displaystyle\int_{]a,b]} f$ converge $\Longleftrightarrow \alpha < 1$.*

(12) : ***Distance finie :*** *si $b$ est fini et $f(t) \sim \frac{\lambda}{(b-t)^\alpha}$ avec $\lambda \neq 0$ alors $\displaystyle\int_{[a,b[} f$ converge $\Longleftrightarrow \alpha < 1$.*

(13) : ***Distance infinie :*** *si $f(t) \sim \frac{\lambda}{t^\alpha}$ avec $\lambda \neq 0$ alors $\displaystyle\int_{[a,+\infty[} f$ converge $\Longleftrightarrow \alpha > 1$.*

**5.** Rappeler son expression, puis montrer que la fonction $\Gamma$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour les plus courageux, montrer qu'elle est $C^1$ et même $C^\infty$ sur cet intervalle.

(14) : $\displaystyle\int_{\to 0}^{\to +\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ *converge $\Longleftrightarrow x > 0$ (fonction $\Gamma$ d'*EULER*, on rappelle au passage que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$).*

*i) pour tout $x > 0$, $t \longmapsto f(x,t) =$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$ : en effet,*

*• au voisinage de 0 : $0 \leqslant |f(x,t)| \sim_{t\to 0} \dfrac{1}{t^{1-x}}$ qui est intégrable par critère de Riemann si et seulement si $\alpha = 1-x < 1$, c'est à dire $x > 0$.*

*• au voisinage de $+\infty$, $0 \leqslant |f(x,t)| =_{t\to+\infty} o(\dfrac{1}{t^2})$ par croissance comparées. Alors par critère de Riemann à distance infinie et par théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, $f$ est intégrable.*

*ii) $\forall\, t \in ]0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable et $\forall\,(x,t) \in ]0,+\infty[^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = (\ln t)\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$.*

*iii) Pour tout $x > 0$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.*

*iv) Pour tout $t > 0$, $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$.*

*v) Pour tout $[a,b] \subset ]0,+\infty[$ et $\forall\,(t,x) \in ]0,+\infty[ \times [a,b]$ :*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t) \text{ avec } \varphi(t) = \begin{cases} |\ln t|\mathrm{e}^{-t}t^{a-1} & si \quad t \in ]0,1[ \\ |\ln t|\mathrm{e}^{-t}t^{b-1} & si \quad t \in [1,+\infty[ \end{cases}$$

*avec $\varphi$ continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$.*

*En effet :*

$$\varphi(t) \underset{0^+}{\sim} |\ln t|t^{a-1} = \varphi_1(t) \text{ et } \lim_{t\to 0^+} t^{1-\frac{a}{2}}\varphi_1(t) = \lim_{t\to 0} t^{\frac{a}{2}}|\ln t| = 0.$$

*Donc, au voisinage de $0^+$, $\varphi_1(t) = o\left(\dfrac{1}{t^{1-\frac{a}{2}}}\right)$.*

*Or $t \longmapsto \dfrac{1}{t^{1-\frac{a}{2}}}$ est intégrable sur $]0,1[$(fonction de Riemann avec $1 - \dfrac{a}{2} < 1$).*

*Donc, $\varphi_1$ est intégrable sur $]0,1[$.*

*Donc, par critère d'équivalence pour les fonctions positives, $\varphi$ est intégrable sur $]0,1[$. (*)*

$$\lim_{t\to+\infty} t^2\varphi(t) = 0.$$

*Donc, pour $t$ au voisinage de $+\infty$, $\varphi(t) = o(\dfrac{1}{t^2})$.*

*Or, $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (fonction de Riemann intégrable).*

*Donc $\varphi$ est intégrable sur $[1,+\infty[$. (**)*

*D'après (*) et (**), $\varphi$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.*

*D'où, d'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, $\Gamma$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.*

*De plus, $\forall\, x \in ]0,+\infty[$, $\Gamma'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln t)\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.*

**6.** Montrer que $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$ en utilisant le théorème de comparaison séries/intégrales à la fonction $t \mapsto 1/t$.

*La fonction $t \mapsto 1/t$ est décroissante sur $[1,+\infty]$ donc par théorème de comparaison séries intégrales, la* **série** *numérique de terme général $\left(f(k) - \int_{[k,k+1]} f = \dfrac{1}{k} - \ln\dfrac{k+1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et sa somme qu'on note $\gamma$ est telle que $0 \leqslant \gamma \leqslant f(1) = 1$.*

*Autrement dit,* $\sum_1^n \frac{1}{k} - \sum_1^n \ln \frac{k+1}{k} = \gamma + o(1)$.

*La deuxième somme est télescopique et* $\sum_1^n \ln \frac{k+1}{k} = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1) = \ln(n) + \ln(1+1/n) \sim \ln n$.

*Finalement,* $\sum_1^n \frac{1}{k} - \ln n = \gamma + o(1)$.

# Série 5

**1.** Citer la formule de Taylor avec reste intégral. Comment peut-on la démontrer ?

*Tant qu'on y est : rappelons toutes les formules !*

*Soit* $f : I \to E$ *de classe* $\mathcal{C}^n$ *et* $(a,b) \in I^2$.

**Formules globales :**

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t. \textit{ (reste intégral)}$$

**qui se démontre par récurrence et IPP**

$$\|f(b) - f(a) - \cdots - \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)\| \leqslant \frac{|b-a|^n}{n!} \sup\{\|f^{(n)}(t)\|,\ t \in [a,b]\} \textit{ (Lagrange).}$$

**Formule locale :**

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + o(h^n) \textit{ (Young).}$$

**2.** Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente (on pourra faire une intégration par parties).

*On identifie 2 problèmes en 0 et en* $+\infty$.

*La fonction* $f : t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ *est continue (donc continue par morceaux) sur* $]0, +\infty[$.

*Au voisinage de 0 :* $\sin(t)/t \sim 1$ *donc* $f$ *est prolongeable par continuité en posant* $f(0) = 1$. *L'intégrale est faussement impropre en 0, donc convergente.*

*Au voisinage de* $+\infty$ *: pas de comparaison possible : la fonction change de signe. On va faire une intégration par parties :*

*Pour* $M \geqslant 1$, *sur l'intervalle* $[1, M]$, *les fonctions* $t \mapsto \frac{1}{t}$ *et* $t \mapsto \sin t$ *sont de classe* $C^1$. *Donc*

$$\int_1^M \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = [-\frac{\cos t}{t}]_1^M - \int_1^M \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

*Lorsque* $M$ *tend vers* $+\infty$, *le crochet est convergent car* $\lim \frac{\cos t}{t} \longrightarrow 0$.

*De plus,* $0 \leqslant \left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}$ *qui est intégrable au voisinage de* $+\infty$ *par critère de Riemann à distance infinie car* $2 > 1$.

*Donc par théorème de comparaison,* $\int_1^M \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ *admet une limite finie lorsque* $M$ *tend vers* $+\infty$.

*En conclusion,* $\int_1^M \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ *admet une limite finie lorsque* $M$ *tend vers* $+\infty$.

*Ainsi,* $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ *est convergente.*

*Par contre, on peut montrer que* $f$ *n'est pas intégrable (c'est à dire que l'intégrale n'est pas absolument convergente) : l'intégrale est donc semi-convergente.*

**3.** Soit $n \geqslant 1$. En appliquant le th. de Rolle en cascade (on fera une récurrence propre), montrer que si $f$ est une fonction de classe $C^n$ qui admet au moins $(n+1)$ zéros distincts sur $[a,b]$, il existe $c \in ]a,b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

*Soit* $n \geqslant 1$ *entier. Soit* $P_n$ *la propriété : " si une fonction* $g$ *est de classe* $C^n(I, \mathbb{R})$ *et s'annule au moins* $(n+1)$ *fois sur* $I$, *alors sa dérivée* $g^{(n)}$ *s'annule au moins une fois sur* $I$.

*Initialisation : pour* $n = 1$, *si* $f$ *s'annule 2 fois en* $a, b$, *comme elle continue sur* $[a,b]$ *et dérivable sur* $]a,b[$, *par théorème de Rolle, sa dérivée s'annule au moins une fois en* $c \in ]a,b[$.

*Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P_n$ est vraie. Supposons que $f$ de classe $C^{n+1}$ s'annule au moins $(n+2)$ fois sur $]a,b[$ en $a_1 < a_2 < \cdots < a_{n+1} < a_{n+2}$. En appliquant le théorème de Rolle sur chaque $[a_i, a_{i+1}]$, on en déduit que la fonction $g = f'$ est de classe $C^n$ et s'annule en des $b_i \in ]a_i, a_{i+1}[$, pour $i \in [1, n+1]$. Les $b_i$ sont 2 à 2 distincts (intervalles $]a_i, a_{i+1}[$ ouverts !)*
*Donc par hypothèse de récurrence $g^{(n)} = f^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois sur $[a,b]$.*

**4.** Calculer la limite de $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^n(t)\,\mathrm{d}t$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ en utilisant le théorème de convergence dominée.

*Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in [0, \pi/4]$, $|\tan(t)| \leqslant \phi(t) = 1$. La fonction $\phi$ est indépendante de $n$. Elle est intégrable sur $[0, \pi/4]$. Elle domine le phénomène.*
*Par ailleurs, $f_n(t) = \tan^n(t) \longrightarrow 0$ si $t \in [0, \pi/4[$ et 1 si $t = \pi/4$ (suite géométrique).*
*Donc $f_n$ converge simplement vers la fonction $f : t \mapsto 0$ si $t \neq \pi/4$ et 1 si $t = \pi/4$.*
*Par théorème de convergence dominée, $f$ est intégrable et $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} /4 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/4} f(t) = 0$.*
*Donc la suite de l'énoncé tend vers 0.*

**5.** Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ en appliquant le th. d'intégration terme à terme de Beppo-Levi (on pourra commencer par montrer que $\displaystyle\frac{t}{e^t-1} = \frac{te^{-t}}{1-e^{-t}}$).

*On écrit que pour $t > 0$, $\displaystyle\frac{1}{e^t-1} = \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} = e^{-t}\frac{1}{1-e^{-t}} = e^{-t}\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kt} = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-(k+1)t}$ par somme de série géométrique de raison $0 < e^{-t} < 1$.*
*Donc en multipliant par $t$, $\displaystyle\frac{t}{e^t-1} = \frac{te^{-t}}{1-e^{-t}} = \sum_{k=0}^{+\infty} te^{-(k+1)t}$.*
*Posons pour $n \geqslant 0$, $f_k(t) = te^{-(k+1)t}$ de sorte que $\sum f_k$ converge simplement vers $f : t \mapsto \dfrac{t}{e^t-1}$ d'après ce qui précèede.*
*De plus, $\int_0^{+\infty} |f_k(t)| = \int_0^{+\infty} f_k(t) = \dfrac{1}{(k+1)^2}$ par IPP.*
*La série $\sum 1/(k+1)^2$ est convergente par critère de Riemann. On peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme de Beppo Levi qui donne :*

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \sum_{k\geqslant 0} f_k(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k\geqslant 0}\int_0^{+\infty} f_k(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n^2} (= \pi^2/6...)$$

# Série 6

**1.** Quelles sont les intégrales convergentes ?

a $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ convergente par critère de Riemann en 0 (distance finie) car $1/2 < 1$.

b $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t}}$ convergence par critère de Riemann en $+\infty$ (distance infinie) car $3/2 > 1$.

c $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{dt}{t^{3/2}}$ divergente ! elle ne peut pas vérifier les critères de Riemann en 0 et en l'infini simultanément !...

d $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt[3]{t-1}}$ convergente par critère de Riemann en 1 (distance finie) car $1/3 < 1$

**2.** $\displaystyle\cos x \cos y = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)\left(\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}\right) = \frac{e^{i(x+y)}+e^{-i(x+y)}}{4} + \frac{e^{i(x-y)}+e^{-i(x-y)}}{4} = \frac{1}{2}(\cos(x+y)+\cos(x-y))$

**3.** Nature et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\exp(-\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ à l'aide d'un changement de variable généralisé à justifier.

*La fonction $\phi : t \mapsto \sqrt{t}$ est $C^1$ et* **bijectif** *de $]0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$. Par changement de variables généralisé, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\exp(-\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} 2\exp(-u)\,\mathrm{d}u$ ont même nature et même valeur si elles convergent.*
*Ici, $\displaystyle\int_0^{+\infty} 2\exp(-u)\,\mathrm{d}u = 2$, donc l'intégrale de l'énoncé converge et est égale à 2.*

**4.** Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \exp(-t)\,\mathrm{d}t$ à l'aide d'une IPP généralisée à justifier.

*Voir aussi la fonction Gamma !*

*Soit* $n \in \mathbb{N}$ *et* $P_n$ *la propriété :* $t \mapsto t^n \exp(-t)$ *est intégrable sur* $[[0, +\infty$ *et* $\int_0^{+\infty} t^n \exp(-t)\,\mathrm{d}t = n!$

*Initialisation :* $n = 0$ *:* $t \mapsto \exp(-t)$ *est continue par morceaux et* $\exp(-t) =_{t\to+\infty} o(1/t^2)$ *par croissances comparées. Donc* $t \mapsto \exp(-t)$ *est intégrable par théorème de comparaison de fonctions intégrables.*

*Et* $\int_0^{+\infty} \exp(-t)\,\mathrm{d}t = \lim_{M\to+\infty} \int_0^M \exp(-t)\,\mathrm{d}t = \lim M \to +\infty 1 - \exp(-M) = 1$

*Hérédité : soit* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $P_n$ *est vérifiée. Alors les fonctions* $t \mapsto t^{n+1}$ *et* $t \mapsto \exp(-t)$ *sont* $C^1$ *sur* $\mathbb{R}_+$*. De plus, le crochet* $[-t^{n+1}\exp(-t)]_0^{+\infty}$ *est convergent vers* $0$ *car* $n+1 \geqslant 1$ *et par croissances comparées.*

*Donc* $\int_0^{+\infty} t^{n+1}\exp(-t)\,\mathrm{d}t$ *et* $\int_0^{+\infty} t^n \exp(-t)\,\mathrm{d}t$ *ont même nature (c'est à dire convergentes par hypothèse de récurrence) et on peut faire une intégration par parties : on trouve :* $\int_0^{+\infty} t^{n+1}\exp(-t)\,\mathrm{d}t = 0 + (n+1)\int_0^{+\infty} t^n \exp(-t)\,\mathrm{d}t = (n+1)\cdot n! = (n+1)!$ *par hypothèse de récurrence.*

*Récurrence établie.*

**5.** Si $\sum u_n$ est une série convergente, montrer que $u_n \longrightarrow 0$.

Déterminer une fonction $f$ continue sur $[0, +\infty[$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ est convergente, mais $f$ ne tend pas vers $0$ au voisinage de $+\infty$.

*Si* $\sum u_n$ *est convergente, la suite de ses sommes partielles* $(U_n)$ *est convergente également. Donc* $u_n = U_n - U_{n-1}$ *tend vers 0 par théorème opératoire sur les limites de suites convergentes.*

*Par contre, si* $\int f$ *est convergente, on n'a pas nécessairement* $f$ *converge vers 0 (le contre exemple à base de triangles a été vu en cours).*

*Mais SI* $f$ *admet une limite* $\ell$ *et* $\int_a^{+\infty} f$ *est convergente, alors* $\ell = 0$.

**6.** Montrer que si $f$ et $g$ sont de carrés intégrables sur $I$, alors le produit $fg$ est intégrable sur $I$ (on pourra majorer $|fg|$...).

*On part de* $|fg| \leqslant \dfrac{1}{2}(|f|^2 + |g|^2) \Leftrightarrow 2|fg| \leqslant |f|^2 + |g|^2 \Leftrightarrow 0 \leqslant (|f| - |g|)^2$*. Donc l'inégalité de départ est vraie.*

*Ensuite, si* $f$ *et* $g$ *sont de carrés intégrables,* $\int f^2 + g^2$ *est convergente par combinaison linéaire d'intégrales convergentes.*

*Enfin, par théorème de comparaison d'intégrales de fonctions positives, l'intégrale de* $|fg|$ *est convergente.*

## V — Exercices :

### 1) Exercices d'échauffement :

(15) : Formule de Leibniz : **Exo 3 CCP**

(16) : Intégrabilité : **Exo 28 CCP**.

(17) : Fonction Gamma : **Exo 29 CCP**

(18) : Intervertion des symboles série/intégrale : **Exo 19 CCP**

(19) : Convergence dominée : **Exo 25 CCP**

(20) : Un peu de topologie : **Exo 37 CCP** et **Exo 54 CCP**.

## 2) Exercices d'approfondissement :

**Exercice 1 :** Démonstration du théorème de Stone et Weierstrass :

*Soit* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *continue. Pour* $n \in \mathbb{N}$ *et* $x \in [0,1]$*, on pose* $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(\frac{k}{n}) x^k (1-x)^{n-k}$ *(polynôme de Bernstein).*

1. *Montrer que si* $S_n$ *est une v.a.r.d. suivant une loi binomiale de paramètres* $(n,x)$*, alors*
$$\forall \alpha > 0, \mathbb{P}(|S_n - nx| > n\alpha) \leqslant \frac{1}{4n\alpha^2}.$$
2. *Soit la v.a.r.d.* $f(\frac{S_n}{n})$*. Démontrer que* $\mathbb{E}\left(f(\frac{S_n}{n})\right) = B_n(f)(x)$*.*
3. *Soit* $\varepsilon > 0$*. Justifier qu'il existe* $\alpha > 0$ *tel que si* $a$ *et* $b$ *sont des réels de* $[0,1]$ *tels que* $|a-b| \leqslant \alpha$*, alors* $|f(a) - f(b)| \leqslant \varepsilon$ *puis majorer* $|f(k/n) - f(x)|$ *lorsque* $k \in [0,n]$ *vérifie* $|k/n - x| \leqslant \alpha$*.*
4. *Justifier que*
$$\left| \sum_{|\frac{k}{n} - x| > \alpha} (f(k/n) - f(x)) \mathbb{P}(S_n = k) \right| \leqslant 2||f||_\infty \cdot \mathrm{P}\left( |\frac{S_n}{n} - x| > \alpha \right).$$
5. *Démontrer qu'il existe un entier naturel* $n_0$ *tel que pour tout* $n \geqslant n_0$ *et tout réel* $x \in [0,1]$*,*
$$B_n(f)(x) - f(x)| \leqslant 2\varepsilon$$
*et en déduire le théorème de Stone et Weierstrass.*

**Exercice 2 :** Transformation d'Abel :

*Montrer que la série* $\sum \dfrac{e^{in}}{n}$ *est semi-convergente.*

**Exercice 3 :** Point fixe

*Soit* $K$ *un compact de* $E$ *(evn) et* $f : K \to K$ *telle que* $\forall (x,y) \in K^2, x \neq y \Rightarrow ||f(x) - f(y)|| < ||x - y||$*.*

1. *Montrer que* $f$ *admet un unique point fixe noté* $\ell$*. On pourra considérer l'application* $h : K \to \mathbb{R}$ *telle que* $h(x) = ||f(x) - x||$*.*
2. *Soit* $(u_n) \in K^{\mathbb{N}}$ *définie par* $u_0 \in K$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$*. Montrer que la suite* $(u_n)$ *converge vers* $\ell$*.*

**Exercice 4 :** Uniforme continuité

*Montrer qu'une fonction* $f$ *continue sur* $\mathbb{R}_+$ *ayant une limite finie en* $+\infty$ *est uniformément continue sur* $\mathbb{R}_+$*.*