Révisions 1 : Algèbre linéaire

I — Le B.A.BA

1) Définitions théorèmes :

Liste non exhaustive des éléments du cours à maîtriser :

- Formule des coefficients du produit de deux matrices $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$.
- Base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. SEV classiques (matrices triangulaires, (anti)symétriques, diagonales...) : bases et dimensions.
- Transposition. ${}^t(A \cdot B) =^t B \cdot^t A$ et ${}^t(M^{-1}) = ({}^tM)^{-1}$ si M est inversible.
- Matrices élémentaires : $E_{i,j}E_{kl} = \delta_j^k E_{i,l}$.
- Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une triangulaire supérieure.
- Déterminant : forme n linéaire alternée sur E de dimension n. Forme antisymétrique. Si $2 \neq 0$, une forme est alternée ssi elle est antisymétrique.
- Structure : l'espace vectoriel des formes n-linéaire alternée sur E de dimension n est une droite.
- Formule du déterminant. Propriétés élémentaires ($\det(\lambda A)$, $\det({}^tA)$, $\det(AB)$, $\det(A^{-1})$). Conservation du déterminant par combinaisons linéaires de rangées. Déterminant par blocs/déterminant d'une matrice triangulaire.
- Cofacteur. Formule d'inversion.
- Formules de changement de bases.
- Matrices semblables. Interprétation géométrique.
- Sous espace stable par un endomorphisme. Droite stable.
- Caractérisation d'une somme directe de plusieurs SEV.
- Polynôme caractéristique. Coefficients c_n, c_{n-1}, c_0.
- Théorème de Cayley-Hamilton.
- Idéal annulateur d'une matrice/d'un endomorphisme. Existence du polynôme minimal.
- Valeur propre, espace propre. Spectre. Formule de changement de bases des endomorphismes.
- Si $f(x) = \lambda x$, alors $(P(f))(x) = P(\lambda) \cdot x$
- Les racines du polynôme caractéristique sont exactement les valeurs propres. Même propriété pour le polynôme minimal.
- La dimension dun sous espace propre est majorée par la multiplicité de la valeur propre associée.
- Invariants d'endomorphismes (trace, déterminant, polynôme caractéristique, polynôme minimal, valeurs propres, spectre...)
- Multiplicité algébrique d'une valeur propre. Dimension géométrique du sous espace propre associé.
- CNS de trigonalisation/diagonalisation.
- Lemme des noyaux **Exos 62 et 93 CCP** : si $P_1, \dots P_r$ sont 2 à 2 premiers entre eux, $\operatorname{Ker}\left(\left(\prod P_i\right)(f)\right) = \oplus \operatorname{Ker} P_i(f)$
- Trigonalisation forte d'une matrice complexe.

II — Démonstrations classiques à connaître :

- Montrer que les sev propres d'un endomorphisme sont en somme directe. Donner un exemple où ils ne sont pas supplémentaires.
- Montrer que la famille $(x \mapsto \exp(\alpha x))_{\alpha \in \mathbb{R}}$ est libre.
- Montrer que si f et g commutent, tout sev propre de f est stable par g.
- Montrer que si $P(f) = 0$, toute valeur propre de f est racine de P. Toute racine de P est-elle valeur propre de f ?
- Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que l'algèbre commutative $\mathbb{K}[M]$ est de dimension finie égale au degré du polynôme minimal de M. En donner une base.
- Montrer que les matrices qui commutent avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont les matrices scalaires.
- Montrer que si $\forall x \in E, \exists \lambda_x, f(x) = \lambda_x \cdot x$, alors f est une homothétie de E.
- Justifier l'existence de $\exp(A)$ pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- Calcul du déterminant de Vandermonde.
- Calcul du déterminant d'une matrice compagne.
- Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal d'une projection puis d'une symétrie.
- On suppose que χ_A est scindé. Exprimer $\operatorname{Tr}(A)$ et $\det(A)$ d'une matrice A en fonction des valeurs propres de A.

III — Méthodes :

- Démontrer qu'une matrice est diagonalisable Pour démontrer qu'une matrice A est diagonalisable, on peut :
  1. calculer le polynôme caractéristique χ_A et à le factoriser pour déterminer les valeurs propres de A . Si χ_A n'est pas scindé, A n'est pas diagonalisable. Si χ_A est scindé à racines simples, A est diagonalisable. Si χ_A est scindé sans être à racines simples, pour chaque valeur propre, on cherche une base de l'espace propre associé et on étudie si la dimension de cet espace propre vaut la multiplicité de la racine.
  2. dans le cas où la matrice a un petit rang (un ou deux), on peut essayer de déterminer directement un ou deux vecteurs propres indépendants en étudiant la forme de la matrice. Exemple : la matrice J qui n'est composée que de 1 est de rang 1, donc 0 est valeur propre de multiplicité $(n-1)$ et par trace, n est valeur propre de multiplicité 1. Donc J est diagonalisable et $\chi_J = X^{n-1}(X-1)$.
  3. utiliser le fait que A est diagonalisable si et seulement si A annule un polynôme scindé à racines simples.
  4. utiliser le théorème spectral (matrice symétrique réelle)
- Pour diagonaliser effectivement une matrice A :
  1. on cherche ses valeurs propres par exemple en calculant le polynôme caractéristique ;
  2. pour chaque valeur propre, on cherche une base de l'espace propre associé ;
  3. on a alors $A = PDP^{-1}$ où P est la matrice dont les colonnes sont constituées par la réunion des bases des espaces propres et la matrice D est la matrice diagonale dont les coefficients sont les valeurs propres de A, écrites dans le même ordre que les vecteurs colonnes de P.
- Pour trigonaliser une matrice A :
  1. on cherche les valeurs propres en calculant le polynôme caractéristique de A
  2. pour chaque valeur propre, on cherche une base de vecteurs propres associés
  3. si l'énoncé donne la forme d'une matrice triangulaire à laquelle A doit être semblable, on cherche un vecteur vérifiant la dernière condition
  4. sinon, si on est en dimension 3 et que l'on a déjà obtenu deux vecteurs, on complète la famille obtenue par n'importe quel vecteur indépendant des deux premiers.
  5. Revoir aussi la méthode par noyaux itérés (exercices ... et ... du chapitre de réduction).
- Pour déterminer une racine carrée, cubique, n -ième d'une matrice, exponentielle d'une matrice.
  1. Diagonaliser A , $A = PDP^{-1}$
  2. Chercher une racine carrée de D en considérant la matrice E diagonale dont les coefficients sur la diagonale sont les racines carrées des coefficients de D
  3. Poser $B = PEP^{-1}$ qui vérifie bien $B^2 = A$.
- Pour démontrer qu'un endomorphisme $v \in \mathcal{L}(E)$ vérifie certaines propriétés relatives à l'endomorphisme diagonalisable u , on peut vérifier que v vérifie cette propriété sur chaque sous-espace propre de u , puis utiliser que E est somme directe des sous-espaces propres de u (exemple : les endomorphismes v qui commutent avec u sont exactement les endomorphismes v qui laissent stable les sous espaces propres de u.)
- Contre exemples : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable car elle serait semblable (et donc égale) à la matrice nulle. De même, la matrice d'un quart de tour $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable (ni trigonalisable) dans $\mathbb{R}$ mais elle l'est dans $\mathbb{C}$.
- Pour calculer les puissances d'une matrice $A \in \mathcal{M}n(\mathbb{K})$, on peut :
  1. déterminer un polynôme annulateur P de A : par exemple, on peut utiliser pour P le polynôme caractéristique de A.
  2. Trouver le reste de la division euclidienne de X^k par P : $X^k = PQ + R$.
  3. Alors $A^k = R(A)$.
- Pour déterminer le polynôme minimal d'une matrice A , on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :
  1. calculer les puissances de A et trouver une relation entre elles de degré le plus petit possible
  2. chercher le polynôme minimal parmi les diviseurs du polynôme caractéristique, en se souvenant que ces deux polynômes ont les mêmes racines
  3. chercher à étudier si A est diagonalisable, dans ce cas, son polynôme minimal est $(X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_p)$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les valeurs propres distinctes de A.

Faire AU MOINS une interrogation tous les jours !

IV — Interrogations quotidiennes :

Série 1 énoncés :

1. Donner la définition mathématique d'une valeur propre d'une matrice M ?
2. Qu'appelle-t-on le sous espace propre associé ?
3. Donner la définition du polynôme minimal d'une matrice M.
4. Justifier que toute matrice de $\mathcal{M}_{2k+1}(\mathbb{R})$ admet au moins une valeur propre réelle.
5. Citer au moins 5 invariants de similitude.
6. Citer le théorème des restes chinois et donner un exemple d'application.

Série 2 énoncés :

1. Donner l'énoncé mathématique de l'affirmation : " la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est une famille libre. "
   Précisez les étapes d'une démonstration de cette affirmation en utilisant un raisonnement par récurrence.
2. Compléter la définition suivante par 4 énoncés équivalents :
   Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors : $\Updownarrow$
   - λ est une valeur propre de M.
   -
   -
   -
   -
3. Donner la définition du polynôme caractéristique de M.
4. Si $\chi_M = \sum a_k X^k$, précisez les valeurs de a_0, a_{n-1} et a_n.

Série 3 énoncés :

1. Quels sont les idéaux de $\mathbb{R}[X]$?
2. Quel est le polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire ?
3. Quel est le polynôme caractéristique de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
4. Rappeler la formule du déterminant.
5. Rappeler les formules de changement de bases.

Série 4 énoncés :

1. Donner la définition d'un groupe. On écrira les propriétés à vérifier en langage mathématique.
2. Rappeler la formule du déterminant de Vandermonde (on écrira la matrice correspondante)
3. Donner une base et la dimension de l'ensemble des matrices triangulaires supérieures, puis de l'ensemble des matrices antisymétriques.
4. Rappeler la définition du polynôme annulateur d'une matrice carrée.
5. Quel est le polynôme minimal de aI_n pour $a \in \mathbb{K}$.

Série 5 énoncés :

1. Citer le théorème de Lagrange pour les groupes.
2. Quel est le polynôme minimal d'une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont 2 à 2 distincts.
3. Quelle est la formule générale de $E_{i,j}E_{k,l}$
4. Quel est le polynôme caractéristique de aI_n pour $a \in \mathbb{K}$.
5. Quel sont les polynômes caractéristique et minimal de $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Série 6 énoncés :

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Quelle est la dimension de l'algèbre $(\mathbb{K}[M], +, \times, \cdot)$?

2. Rappeler les formules de changement de bases.

3. Justifier que toute matrice de $\mathcal{M}_{2k+1}(\mathbb{R})$ admet au moins une valeur propre réelle.

4. Citer au moins 5 invariants de similitude.

5. Citer le théorème des restes chinois et donner un exemple d'application.

Série 1 corrigés :

1. Donner la définition mathématique d'une valeur propre d'une matrice M ?
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. $\lambda \in Sp(M) \Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}, MX = \lambda X$.

2. Qu'appelle-t-on le sous espace propre associé ?
$E_\lambda = Ker(M - \lambda I_n) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) | MX = \lambda X\}$

3. Donner la définition du polynôme minimal d'une matrice M.
L'ensemble $I_M = \{P \in \mathbb{K}[X] | P(M) = 0\}$ *est un idéal de* $\mathbb{K}[X]$*, donc il est monogène.*
Lorsqu'il n'est pas réduit à $I_M = \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$*, on pose* μ_M *son générateur unitaire.*

4. Justifier que toute matrice de $\mathcal{M}_{2k+1}(\mathbb{R})$ admet au moins une valeur propre réelle.
$deg(\chi_M)$ *est impair. D'après le théorème des valeurs intermédiaires,* χ_M *s'annule au moins une fois dans* $\mathbb{R}$.
Donc M *admet au moins une valeur propre réelle.*

5. Citer au moins 5 invariants de similitude.
$det(M)$, $Tr(M)$, χ_M, μ_M, $\mathrm{Sp}(M)$.

6. Citer le théorème des restes chinois et donner un exemple d'application.
Si n *et* p *sont premiers entre eux, l'application* $\phi : \mathbb{Z}/np\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times Z/p\mathbb{Z}$ *définie par* $\phi(x \bmod np) = (x \bmod n, x \bmod p)$ *est un isomorphisme d'anneaux.*
Si $nu + pv = 1$*, les solutions du système* $\begin{cases} x \equiv a[n] \\ x \equiv b[p] \end{cases}$ *sont les* $x \equiv x_0[np]$ *où* $x_0 = nub + pva$.

Série 2 corrigés :

1. Donner l'énoncé mathématique de l'affirmation : " la famille $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est une famille libre dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. "
Toute sous famille finie de $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ *est libre, c'est à dire :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \forall (\lambda_1, \ldots \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \sum \lambda_i f_{a_i} = 0 \Rightarrow \forall i \in [1, n], \lambda_i = 0.$$

2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors : $\Updownarrow$
- λ est une valeur propre de M.
- $M - \lambda I_n$ est non inversible.
- $Ker(M - \lambda I_n) \neq \{0\}$
- $\exists X_0 \neq 0, MX_0 = \lambda X_0$
- $det(\lambda I_n - M) = 0$

3. Donner la définition du polynôme caractéristique d'une matrice carrée.
$\chi_A = det(XI_n - A)$

4. Si $\chi_A = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ est le polynôme caractéristique de A, que valent a_0, a_{n-1} et a_n ?
$a_0 = (-1)^n det(A)$, $a_{n-1} = -Tr(A)$ *et* $a_n = 1$.

Série 3 corrigés :

1. *Les idéaux de* $\mathbb{R}[X]$ *sont exactement les idéaux monogènes.*
En particulier, si I *est un idéal, il existe un polynôme* $P_0 \in \mathbb{R}[X]$ *tel que* $I = (P_0)$.

2. Quel est le polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire ?
$\chi_M = \prod_{i=1}^n a_{i,i}$.

3. Quel est le polynôme caractéristique de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

   $\chi_A = X^4 - 4X^3 + 3X^2 - 2X + 1$
4. Rappeler la formule du déterminant d'une matrice.

   $det((a_{i,j})) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$
5. Rappeler les formules de changement de bases.

   Si $P = P_\beta^{\beta'}$ est la matrice de passage de l'ancienne base β vers la nouvelle base β', alors $P_\beta^{\beta'}$ est la matrice de l'identité depuis la base de départ β' vers la base d'arrivée β. Alors si X est la matrice des coordonnées d'un vecteur u exprimé dans la base β et X' celle des coordonnées du même vecteur dans la base β', alors $X = PX'$.

   Si f est un endomorphisme dont la matrice dans la base β est A et celle dans la base β' est B alors $B = P^{-1}AP$.

Série 4 corrigés :

1. Rappeler la formule du déterminant de Vandermonde (on écrira la matrice correspondante)

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \dots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).$$

2. Donner une base et la dimension de l'ensemble $\mathcal{T}_n$ des matrices triangulaires supérieures de taille n, puis de l'ensemble $\mathcal{A}_n$ des matrices antisymétriques de taille n.

   $\beta_{\mathcal{T}_n} = (E_{i,j})_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n}$. $dim(\mathcal{T}_n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

   $\beta_{\mathcal{A}_n} = (E_{i,j} - E_{j,i})_{1 \leqslant i < j \leqslant n}$. $dim(\mathcal{A}_n) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.
3. Rappeler la définition du polynôme annulateur d'une matrice carrée.

   Pour une matrice M, l'ensemble des polynômes annulateurs de M est un idéal non réduit à $\{0\}$ par exemple par le théorème de Cayley-Hamilton. Ce idéal est monogène. Le polynôme annulateur de la matrice carrée M est le générateur unitaire de l'idéal annulateur de M.
4. Quel est le polynôme minimal de aI_n pour $a \in \mathbb{K}$.

   $\mu_{aI_n} = (X - a)$ *pour* $a \in \mathbb{K}$.

Série 5 corrigés :

1. Quel est le polynôme minimal d'une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont 2 à 2 distincts.

   $\mu_M = \chi_M = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$
2. *De manière générale, $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_j^k E_{i,l}$. Par exemple, $E_{3,7}E_{6,7} = 0$, $E_{3,7}E_{7,6} = E_{3,6}$ et $E_{6,7}E_{7,3} = E_{6,3}$.*
3. Quel est le polynôme caractéristique de aI_n pour $a \in \mathbb{K}$.

   $\chi_{aI_n} = (X - a)^n$ *pour* $a \in \mathbb{K}$.
4. Quel sont les polynômes caractéristique et minimal de $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

   Si $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\chi_M = X^2 - X + 1 = (X - e^{i\pi/3})(X - e^{-i\pi/3})$. Comme $\mu_M | \chi_M$ et $\mu_M \in \mathbb{R}[X]$, on en déduit que $\mu_M = \chi_M$.

Série 6 corrigés :

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Quelle est la dimension de l'algèbre $(\mathbb{K}[M], +, \times, \cdot)$?

   $dim(\mathbb{K}[M], +, \times, \cdot) = d$ *où* $d = deg(\mu_M)$.
2. Voir plus haut...

3. Justifier que toute matrice de $\mathcal{M}_{2k+1}(\mathbb{R})$ admet au moins une valeur propre réelle.

Si $M \in \mathcal{M}_{2k+1}(\mathbb{R})$, χ_M est un polynôme réel de degré impair. Par théorème des valeurs intermédiaires, χ_M admet au moins une racine. Comme $Sp_{\mathbb{R}}(M) = Racines(\chi_M)$, M admet au moins une valeur propre réelle.

4. Justifier que toute matrice de $\mathcal{M}_{2k+1}(\mathbb{R})$ admet au moins une valeur propre réelle.

$deg(\chi_M)$ est impair. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, χ_M s'annule au moins une fois dans $\mathbb{R}$.

Donc M admet au moins une valeur propre réelle.

5. Citer le théorème des restes chinois et donner un exemple d'application.

Si n et p sont premiers entre eux, l'application $\phi : \mathbb{Z}/np\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times Z/p\mathbb{Z}$ définie par $\phi(x \bmod np) = (x \bmod n, x \bmod p)$ est un isomorphisme d'anneaux.

Si $nu + pv = 1$, les solutions du système $\left\{\begin{array}{l} x \equiv a[n] \\ x \equiv b[p] \end{array}\right.$ sont les $x \equiv x_0[np]$ où $x_0 = nub + pva$.

On peut aussi en déduire que si n et p sont premiers entre eux, $\varphi(np) = \varphi(n)\varphi(p)$.

V — Exercices :

Chercher au moins un exercice par jour.

1) Exercices d'échauffement :

(1) : Réduction : **Exercice 70 CCP**

(2) : Calcul d'un déterminant trigonal : **Exo 63 CCP**.

(3) : Calcul des puissances d'une matrice par division euclidienne : **Exo 91 CCP**.

(4) : Définition, propriétés et étude d'une projection ou d'une symétrie vectorielle : **Exo 71 CCP**.

(5) : Définition et propriétés des polynômes de Lagrange : **Exos 90 et 87**.

Exercices facultatifs si vous maîtrisez les exos CCP précédents.

2) Exercices d'approfondissement :

Exercice 1 : Élements propres

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour $P \in \mathbb{K}[X]$, on pose $\phi(P) = (2X+1)P - (X^2-1)P'$.

1. *Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.*

2. *Soit P un vecteur propre de ϕ. Montrer que $P' \neq 0$ et en déduire que le degré de P est égal à 2.*

3. *Déterminer les éléments propres de ϕ.*

Exercice 2 : Une égalité classique

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\det(\exp(A)) = \exp(Tr\,(A))$.

Exercice 3 : Théorème de Cayley-Hamilton :

Le but de cet exercice est de montrer le th. de Cayley-Hamilton. On s'interdira donc de l'utiliser pour sa résolution !

1. *Soit $n \geqslant 2$ et $(a_0, \dots a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$. Montrer que le polynôme caractéristique de la matrice*

$$A(a_0, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

   est égal à

$$P = X^n - (a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0).$$

   Soit E un $\mathbb{K}$-ev de DF non nulle n et $f \in L(E)$ dont on notera P le polynôme caractéristique. On fixe un élément non nul de E.

2. *Montrer qu'il existe un plus petit entier naturel p tel que la famille $(x, f(x), \dots f^p(x))$ est liée. Vérifier que $p \neq 0$.*
3. *Soit $F = Vect(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$.*
   Montrer que F est stable par f et que la famille $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ en est une base.
4. *On note g l'endomorphisme de F induit par f.*
   Quelle est la matrice de g dans cette base de F ?
5. *Soit Q le polynôme caractéristique de g. Montrer que $Q(g)(x) = 0$.*
6. *Montrer que Q divise P puis que $P(f)(x) = 0$ et conclure.*

VI — Problème(s).

Les parties précédées par une étoile sont à REDIGER et A RENDRE le jour indiqué.

Le temps de préparation est libre : il vaut mieux essayer de répondre à un maximum de questions.

Vous devez rédiger comme pour les écrits de concours.

62BQ

Concours ENSAM - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques A MP

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

À rendre mardi 28 avril avant 20h

Questions de cours et exemples.

Soit E un $\mathbb{R}$ – espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E.

1. Donner la définition d'un polynôme annulateur de f.

2. Quelle est la structure de l'ensemble J_f des polynômes annulateurs de f ?

3. Donner la définition du polynôme minimal de f que l'on notera π_f.

4. Prouver l'existence de π_f.

5. **Un premier exemple**.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ de matrice canoniquement associée :

$$M = (m_{ij}) \text{ où } \forall (i,j) \in \{1,...,4\} \times \{1,...,4\},\ m_{ij} = \frac{1}{4}\left(1 + (-1)^{i+j}\right).$$

5.1. Calculer M^k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

5.2. Déterminer π_f.

6. **Un second exemple**.

6.1. Chercher les solutions à valeurs réelles des équations différentielles :

$$y'' + y = ch(x) \qquad \text{et} \qquad y'' + y = sh(x)$$

où ch et sh sont respectivement les fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique.

6.2. On considère (H_1) l'équation différentielle : $y^{(4)} = y$.

Soit f une fonction de classe C^4 sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que f est solution de (H_1) si et seulement si la fonction $g = f'' + f$ est solution d'une équation différentielle du second ordre (H_2) que l'on déterminera.

6.3. Résoudre l'équation (H_2).

6.4. En déduire les solutions de (H_1).

6.5. On note alors E le sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$ – espace vectoriel des applications de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles engendré par $\left(\cos, \sin, ch, sh\right)$.

6.5.1. Quelle est la dimension de E ?

6.5.2. Justifier que la dérivation induit sur E un endomorphisme δ.

6.5.3. Déterminer le polynôme minimal π_δ de E.

À rendre jeudi 30 avril avant 20h

★ Partie I : EXERCICE 1

Soit les suites réelles (u_n), (v_n) et (w_n) définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} u_{n+1} & = & u_n & + & 3v_n & & \\ v_{n+1} & = & 3u_n & + & v_n & + & 4w_n \\ w_{n+1} & = & & & 4v_n & + & w_n \end{array} \right. \quad \text{et} \quad (u_0, v_0, w_0) = (1, 0, 1).$$

I.1.

I.1.a Justifier sans calcul que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est diagonalisable.

I.1.b Diagonaliser la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

I.1.c Déterminer la matrice A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pourra utiliser la calculatrice.

I.2. Expliciter les termes u_n, v_n et w_n en fonction de n.

★ Partie II : EXERCICE 2

Soit n un entier supérieur à 2 et E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n. On appelle projecteur de E, tout endomorphisme p de E vérifiant $p \circ p = p$.

II.1. Soit p un projecteur de E.

II.1.a Démontrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}\,(p)$ sont supplémentaires dans E.

II.1.b En déduire que la trace de p (notée $\mathrm{Tr}\,(p)$) est égale au rang de p (noté $\mathrm{rg}\,(p)$).

II.1.c Un endomorphisme u de E vérifiant $\mathrm{Tr}\,(u) = \mathrm{rg}\,(u)$ est-il nécessairement un projecteur de E ?

II.2. Donner un exemple de deux matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de rang 1 telles que A soit diagonalisable et B ne soit pas diagonalisable. Justifier la réponse.

II.3. Soit u un endomorphisme de E de rang 1.

II.3.a Démontrer qu'il existe une base $\beta = (e_1, \cdots, e_n)$ de E telle que la matrice $Mat_\beta(u)$ de u dans β soit de la forme :

$$Mat_\beta(u) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \text{où } a_1, \cdots, a_n \text{ sont } n \text{ nombres réels.}$$

II.3.b Démontrer que u est diagonalisable si, et seulement si, la trace de u est non nulle.

II.3.c On suppose que $\mathrm{Tr}\,(u) = \mathrm{rg}\,(u) = 1$. Démontrer que u est un projecteur.

II.3.d Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Démontrer que A est la matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^3$ dont on déterminera l'image et le noyau.

PROBLEME III. SURJECTIVITE DE L'APPLICATION EXPONENTIELLE DE $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ VERS $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

On note, pour n entier $n \geq 2$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.

On notera $1 \leq i, j \leq n$ pour indiquer que : $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$.

Partie préliminaire

Une norme $\|.\|$ sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une norme d'algèbre si elle vérifie la propriété :

pour tout couple de matrices (A,B) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$.

III.1. On note pour $A = (a_{i,j})$ élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\|A\|_\infty = \sup\limits_{1 \leq i,j \leq n} \left|a_{i,j}\right|$ et $\|A\| = n\|A\|_\infty$.

L'application $\|.\|$ est une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Démontrer que c'est une norme d'algèbre.

Dans la suite de cette partie préliminaire, on munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de cette norme d'algèbre.

III.2. Justifier simplement qu'une série de vecteurs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ absolument convergente est convergente.

III.3. Si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, établir que la série de réels positifs $\sum \left\|\frac{1}{k!}M^k\right\|$ converge et en déduire que la série de matrices $\sum \frac{1}{k!}M^k$ converge.

Si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on notera $\exp(M) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}M^k$, exponentielle de la matrice M.

Première partie

On pourra utiliser librement le résultat suivant :

si T est une matrice triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les éléments diagonaux sont $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, alors la matrice $\exp(T)$ est une matrice triangulaire dont les éléments diagonaux sont $e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \ldots, e^{\lambda_n}$.

III.4. Si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, rappeler pourquoi la matrice M est trigonalisable et déterminer une relation entre $\det(\exp(M))$ et $e^{\operatorname{tr}(M)}$.

III.5. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -6 \\ -1 & -9 & 11 \\ 0 & -5 & 7 \end{pmatrix}$.

Donner le déterminant de la matrice A. En déduire qu'il n'existe aucune matrice B à coefficients réels vérifiant $B^2 = A$ et qu'il n'existe aucune matrice M à coefficients réels vérifiant $\exp(M) = A$.

Objectifs et exemple

Ce paragraphe ne comporte aucune question, il permet de se familiariser avec les objectifs du problème.

Si A est une matrice carrée inversible à coefficients réels, nous allons démontrer dans ce problème :

- que pour tout entier naturel non nul p, il existe une matrice B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $B^p = A$,
- qu'il existe une matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\exp(M) = A$.

On se limitera dans ce sujet aux matrices carrées de taille 3.

Le problème a pour objectif de prouver l'existence de ces matrices et de les expliciter.

On commence par un exemple développé dont le candidat pourra s'inspirer notamment pour la troisième partie.

On utilise toujours la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -6 \\ -1 & -9 & 11 \\ 0 & -5 & 7 \end{pmatrix}$.

Le polynôme caractéristique de la matrice A est $\chi_A = (X-2)^2(X+3)$.

On cherche le reste dans la division euclidienne du polynôme X^n par le polynôme χ_A de la forme $aX^2 + bX + c$ où a, b et c vont dépendre de n.

Pour cela on remplace dans la relation $X^n = \chi_A Q + aX^2 + bX + c$, X par -3, puis par 2. Ensuite, on dérive cette expression et on remplace à nouveau X par 2 (Q est le quotient).

On obtient le système suivant $\begin{cases} 9a - 3b + c = (-3)^n \\ 4a + 2b + c = 2^n \\ 4a + b = n2^{n-1} \end{cases}$

admettant pour unique solution $\begin{cases} a = \frac{1}{25}\left((-3)^n - 2^n + 5n2^{n-1}\right) \\ b = \frac{1}{25}\left(-4.(-3)^n + 4.2^n + 5n2^{n-1}\right) \\ c = \frac{1}{25}\left(4.(-3)^n + 21.2^n - 30n2^{n-1}\right) \end{cases}$.

On déduit du théorème de Cayley-Hamilton que pour tout entier naturel n,

$$A^n = aA^2 + bA + cI_3$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -(-3)^n + 6.2^n & -6.(-3)^n + 6.2^n & 6.(-3)^n - 6.2^n \\ 2.(-3)^n - 2.2^n + 5n2^{n-1} & 12.(-3)^n - 7.2^n + 5n2^{n-1} & -12.(-3)^n + 12.2^n - 5n2^{n-1} \\ (-3)^n - 2^n + 5n2^{n-1} & 6.(-3)^n - 6.2^n + 5n2^{n-1} & -6.(-3)^n + 11.2^n - 5n2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

On pose alors, pour tout réel t, la matrice $\gamma(t) \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$:

$$\gamma(t) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3^t e^{i\pi t} + 6.2^t & -6.3^t e^{i\pi t} + 6.2^t & 6.3^t e^{i\pi t} - 6.2^t \\ 2.3^t e^{i\pi t} - 2.2^t + 5t2^{t-1} & 12.3^t e^{i\pi t} - 7.2^t + 5t2^{t-1} & -12.3^t e^{i\pi t} + 12.2^t - 5t2^{t-1} \\ 3^t e^{i\pi t} - 2^t + 5t2^{t-1} & 6.3^t e^{i\pi t} - 6.2^t + 5t2^{t-1} & -6.3^t e^{i\pi t} + 11.2^t - 5t2^{t-1} \end{pmatrix}.$$

On a les résultats suivants :

- $\gamma(-1) = A^{-1}$,
- pour tout entier naturel p non nul : $\left(\gamma(\frac{1}{p})\right)^p = A$,
- $\exp(\gamma'(0)) = A$.

Par exemple,

$$B = \gamma(\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -i\sqrt{3}+6\sqrt{2} & -6i\sqrt{3}+6\sqrt{2} & 6i\sqrt{3}-6\sqrt{2} \\ 2i\sqrt{3}-2\sqrt{2}+5\frac{\sqrt{2}}{4} & 12i\sqrt{3}-7\sqrt{2}+5\frac{\sqrt{2}}{4} & -12i\sqrt{3}+12\sqrt{2}-5\frac{\sqrt{2}}{4} \\ i\sqrt{3}-\sqrt{2}+5\frac{\sqrt{2}}{4} & 6i\sqrt{3}-6\sqrt{2}+5\frac{\sqrt{2}}{4} & -6i\sqrt{3}+11\sqrt{2}-5\frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}$$

vérifie $B^2 = A$.

Deuxième partie

On notera F l'espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ combinaisons linéaires d'applications du type $x \longmapsto x^k \rho^x e^{i\theta x}$ où $k \in \{0,1,2\}$, $\rho \in]0,+\infty[$ et $\theta \in]0,2\pi]$.

(Rappel : pour $\rho \in]0,+\infty[$, $\rho^x = e^{x \ln \rho}$.)

III.6.

III.6.a. Déterminer un élément f de F vérifiant pour tout entier naturel n, $f(n) = \alpha(-3)^n + \beta n^2 2^n$, si α et β sont deux constantes complexes.

III.6.b. Si f est un élément de F et si x_0 est un réel, expliquer pourquoi $x \longmapsto f(x+x_0)$ est encore un élément de F.

III.7.

III.7.a. Soit θ un réel. Démontrer que la suite de nombres complexes $\left(n^2\left(\frac{2}{3}\right)^n e^{i\theta n}\right)$ converge vers 0.

III.7.b. Soit $k_1 \in \{0,1,2\}$, $\rho_1 \in]0,+\infty[$, $\theta_1 \in]0,2\pi]$, $k_2 \in \{0,1,2\}$, $\rho_2 \in]0,+\infty[$ et $\theta_2 \in]0,2\pi]$, $\theta_1 \neq \theta_2$.

Démontrer que si α et β sont deux constantes complexes vérifiant, pour tout entier naturel n,

$\alpha n^{k_1}(\rho_1)^n e^{i\theta_1 n} + \beta n^{k_2}(\rho_2)^n e^{i\theta_2 n} = 0$, alors $\alpha = \beta = 0$.

On pourra, par exemple, supposer $\rho_1 \leq \rho_2$ et commencer par examiner les cas $\rho_1 < \rho_2$ et $\rho_1 = \rho_2$.

III.7.c. On admet alors que si f est un élément de F vérifiant pour tout entier naturel n, $f(n) = 0$, alors f est l'application nulle.

Que peut-on dire de deux applications f et g de F vérifiant pour tout entier naturel n, $f(n) = g(n)$?

III.8. Dans la suite de cette partie, A est une matrice inversible de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Expliquer pourquoi on peut trouver 9 applications $\omega_{i,j}$ éléments de F telles que, pour tout entier naturel n, $A^n = \big(\omega_{i,j}(n)\big)_{1\leq i,j\leq 3}$.

Discuter en fonction du nombre de racines du polynôme caractéristique de la matrice A.

On ne demande pas de résoudre des systèmes, une explication de la méthode pourra suffire.

III.9. On pose pour tout réel t, la matrice $\gamma(t) = \big(\omega_{i,j}(t)\big)_{1\leq i,j\leq 3} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

III.9.a. Quelles sont les matrices $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$?

III.9.b. Justifier que, pour tout couple d'entiers naturels (n,m), on a la relation :

$$\gamma(n+m) = \gamma(n)\gamma(m).$$

III.9.c. Pour x réel et m entier naturel, on pose $f(x) = \omega_{i,j}(x+m)$ et $g(x) = \sum_{k=1}^{3} \omega_{i,k}(x)\omega_{k,j}(m)$.

Démontrer que l'on a $f = g$ et en déduire, pour tout entier naturel m, la relation $\gamma(x+m) = \gamma(x)\gamma(m)$.

III.9.d. En déduire que, pour tout couple (x,y) de réels, $\gamma(x+y) = \gamma(x)\gamma(y)$.

III.10. Démontrer que $\gamma(-1) = A^{-1}$ et que, pour tout entier naturel p non nul, $\left(\gamma(\frac{1}{p})\right)^p = A$.

III.11. Justifier que l'application γ définie pour tout réel t par $\gamma(t) = \big(\omega_{i,j}(t)\big)_{1\leq i,j\leq 3}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que la fonction γ est une solution de l'équation différentielle

$$u'(t) = \gamma'(0)u(t) \quad \text{vérifiant} \quad u(0) = I_3$$

où la fonction inconnue u vérifie, pour tout réel t, $u(t) \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

Trouver la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $u'(t) = \gamma'(0)u(t)$ vérifiant $u(0) = I_3$ et en déduire que l'on a : $\exp(\gamma'(0)) = A$.

Troisième partie : exemple

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

III.12. Donner le polynôme caractéristique de la matrice A.

La matrice A est-elle diagonalisable ?

III.13. Déterminer, par la méthode développée dans ce problème, les éléments suivants :

III.13.a. La matrice A^{-1}.

III.13.b. Une matrice B de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ vérifiant $B^2 = A$.

III.13.c. Une matrice M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ vérifiant $\exp(M) = A$.

Fin de l'énoncé