PARTIE I

On appelle **lois algébriques usuelles** l'addition des fonctions, notée « + », la multiplication des fonctions, notée « × », et la multiplication des fonctions par un scalaire réel, notée « · ».
Pour n entier naturel, on note C_n l'ensemble des fonctions réelles de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[0,1]$.
Si h est une fonction deux fois dérivable sur $[0,1]$, on note h'' sa fonction dérivée seconde.
On note P_n l'ensemble des fonctions polynomiales à cœfficients réels de degré inférieur ou égal à n et définies sur $[0,1]$.
On pose $\mathrm{F}_n = \{f \in \mathrm{C}_n,\ f(0) = f(1) = 0\}$.

1) Muni des lois algébriques usuelles suivantes,

A) $(\mathrm{C}_n,\ +,\ \times)$ est un anneau commutatif

B) P_n est un sous-anneau de $(\mathrm{C}_n,\ +,\ \times)$

C) P_n est un idéal de $(\mathrm{C}_n,\ +,\ \times)$

D) $(\mathrm{C}_n,\ +,\ \cdot)$ est un espace vectoriel de dimension finie

2) Muni des lois $+$ et $\cdot$, l'ensemble $\mathrm{F}_2 \cap \mathrm{P}_2$

A) est réduit à la fonction nulle

B) est un espace vectoriel engendré par les fonctions $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto x^2$

C) est un espace vectoriel de dimension 1

D) n'est pas un sous-espace vectoriel de C_2

3) L'application $h \longmapsto h''$ définit

A) un endomorphisme de l'espace vectoriel P_n

B) une bijection de C_n sur C_n

C) une injection de F_2 dans C_0

D) un isomorphisme d'espaces vectoriels de P_4 sur P_2

Pour tout réel x strictement positif, on note χ_x la fonction qui, à tout réel t, associe la valeur 1 si t est dans l'intervalle $[-x,x]$ et 0 sinon.
f étant élément de C_0, on pose $\mathrm{I}(x) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\chi_x(t)\,\mathrm{d}t$ si $x > 0$ et $\mathrm{I}(0) = 0$.

4) On suppose dans cette question que $f(t) = t$ pour tout t dans $[0,1]$. Pour tout réel $x > 0$,

A) $\mathrm{I}(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} t\,\mathrm{d}t$

B) $\mathrm{I}(x) = \displaystyle\int_{0}^{x} t\,\mathrm{d}t$

C) $\mathrm{I}(x) = \dfrac{x^2}{2}$

D) $\mathrm{I}(x)$ ne dépend pas de x

5) On retourne au cas général où f est un élément quelconque de C_0. La restriction de la fonction I à $[0,1]$

A) appartient à C_0

B) est dérivable et a pour dérivée f

C) appartient à C_2

D) appartient à P_2 si f appartient à P_2.

Soit f dans C_0.
Dans toute la suite, on pose, pour tout x dans $[0,1]$, $g(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \lvert x-t\rvert\, f(t)\,\mathrm{d}t$.

6) On suppose dans cette question que $f(t) = t$ pour tout t dans $[0,1]$.
Alors $g\left(\dfrac{1}{2}\right)$ est égal à

A) $\dfrac{1}{24}$

B) $\dfrac{1}{12}$

C) $\dfrac{1}{16}$

D) 0

7) Pour cette question et les suivantes (jusqu'à la question 10), on revient au cas général où f est un élément quelconque de C_0. Pour tout x dans $[0,1]$,

A) $g(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x (t-x)f(t)\,\mathrm{d}t + \dfrac{1}{2}\int_x^1 (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t.$

B) $g(x) = \dfrac{1}{2}\left[x\left(\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t\right) - \left(\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^x tf(t)\,\mathrm{d}t\right)\right]$

C) $g(x) = \dfrac{1}{2}\left(x\displaystyle\int_1^0 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^0 tf(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^x tf(t)\,\mathrm{d}t\right)$

D) $g(x) = \dfrac{1}{2}\left(x\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t\right)$

8) La fonction g appartient à C_2 et, pour tout x dans $[0,1]$,

A) $g''(x) = 1$

B) $g''(x) = f(x)$

C) $g''(x) = 0$

D) $g''(x) = -f(x)$

9) L'équation différentielle $y'' = f$, d'inconnue y dans F_2, a pour ensemble de solutions

A) $\{x \longmapsto g(x) + (g(0) - g(1))x - g(0)\}$

B) $\{x \longmapsto -g(x)\}$

C) $\{x \longmapsto g(x) + a, \quad a \in \mathbf{R}\}$

D) $\left\{x \longmapsto -g(x) + ax + b, \quad (a,b) \in \mathbf{R}^2\right\}$

10) On peut déduire des questions précédentes que

A) l'application $h \longmapsto h''$ définit une injection non surjective de F_2 dans C_0

B) l'application $h \longmapsto h''$ définit un isomorphisme d'espaces vectoriels de F_2 sur C_0

C) l'application $h \longmapsto h''$ définit une surjection non injective de F_2 dans C_0

D) les dimensions des espaces vectoriels F_2 et C_0 sont finies et égales

Dans toute la suite, on pose, pour tout entier naturel k, $G_k = F_k \cap P_k$ et $\varphi : h \longmapsto h''$ définie de G_{n+2} dans P_n.

11) L'ensemble G_{n+2}, muni des lois $+$ et $\cdot$, est un espace vectoriel

A) de dimension $n+1$

B) dont une base est $\left(x \longmapsto x^k, \quad k \in \{1, \ldots, n+2\}\right)$

C) dont une base est $\left(x \longmapsto x^{k-1}, \quad k \in \{2, \ldots, n+2\}\right)$

D) dont une base est $\left(x \longmapsto x(x-1)^k, \quad k \in \{0, \ldots, n\}\right)$

12) Pour tout entier naturel $k \leqslant n$ et pour tout réel x dans $[0,1]$,

A) $\varphi\left(x^k\right) = k(k-1)x^{k-2}$

B) $\varphi\left(x^{k+2} - x^{k+1}\right) = x^k((k+2)x - (k+1))$

C) $\varphi^{-1}\left(x^k\right) = \dfrac{(x-1)}{(k+1)(k+2)} \displaystyle\sum_{i=1}^{k+1} x^i$

D) $\varphi^{-1}\left(x^k\right) = \dfrac{x^{k+2}}{(k+1)(k+2)}$

13) Soit M la matrice de φ dans les bases $(x \longmapsto x^{k+1}(x-1), \quad k \in \{0, \ldots, n\})$ et $(x \longmapsto x^k, \quad k \in \{0, \ldots, n\})$ de G_{n+2} et P_n respectivement. Alors

A) M n'est pas inversible

B) M est inversible et $M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \cdots & \frac{1}{n(n+1)} & \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ 0 & \frac{1}{6} & \cdots & \frac{1}{n(n+1)} & \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n(n+1)} & \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{(n+1)(n+2)} \end{pmatrix}$

C) M et M^{-1} sont diagonalisables

D) φ et φ^{-1} sont diagonalisables

PARTIE II

Dans toute cette partie, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et on note $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à cœfficients réels. Pour tout élément M de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, on note ${}^t\mathrm{M}$ la matrice transposée de M. Enfin, I_n désigne la matrice unité d'ordre n.

14) De manière générale, une matrice carrée à cœfficients réels

A) est diagonalisable si et seulement si ses cœfficients diagonaux sont distincts deux à deux

B) est diagonalisable si et seulement si les racines de son polynôme caractéristique sont toutes réelles et distinctes deux à deux

C) est inversible si et seulement si ses valeurs propres complexes sont toutes non nulles

D) est inversible si ses cœfficients diagonaux sont tous non nuls

Pour tout réel a, on pose $\mathrm{M}(a) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & 2 & -a \\ 1 & 1 & 2-a \end{pmatrix}$.

15) La matrice $\mathrm{M}(a)$ est équivalente à la matrice

A) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -a \\ 0 & 2 & a \\ 1 & 1 & a-2 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & 2 & -a \\ 0 & 1 & a-1 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & 2 & -a \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & 2 & -a \\ 0 & 0 & 3a-2 \end{pmatrix}$

16) Le nombre 0 est valeur propre de $\mathrm{M}(a)$ si et seulement si

A) $a = 2$

B) $a \neq \dfrac{2}{3}$

C) $a = 1$ ou $a = 2$

D) $a \neq 0$

On pose $C_{M(a)}(X) = \det(XI_3 - M(a))$.

17) Si on écrit $C_{M(a)}(X)$ sous la forme $a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$, alors

A) $a_0 = 6a - 4$

B) $a_1 = 8 - 3a$

C) $a_2 = 5 - a$

D) $a_3 = -1$

18) L'écriture factorisée de $C_{M(a)}(X)$ est

A) $(X-1)^2(X-2)$

B) $(X-1)(X-2)^2$

C) $(X-1)(X-2+a)(X-2)$

D) $(X-a)(X-a+2)(X-2)$

19) La matrice $M(a)$ est diagonalisable si et seulement si

A) $a \neq 0$ et $a \neq 1$

B) $a \neq 0$

C) $a \neq 2$

D) $a \neq 1$

20) Plus généralement, une matrice dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ dont les n valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, supposées réelles, sont les éléments diagonaux de la matrice

A) est diagonalisable

B) a pour déterminant le produit des n valeurs propres

C) est inversible

D) n'existe pas

21) On note A une matrice carrée d'ordre 3, de cœfficient général complexe a_{ij}. On suppose que a_{11}, a_{22} et a_{33} sont les valeurs propres (éventuellement égales) de A. Alors

A) $\det A = a_{11}a_{22}a_{33}$

B) la somme $a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} + a_{23}a_{32}$ est nulle

C) A est diagonale

D) A est diagonalisable

Tournez la page S.V.P.

22) L'hypothèse de la question 21 est vérifiée par

A) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 2i & 1 & -2i \\ 0 & -2i & -2 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$

Dans tout ce qui suit, on note $\mathscr{D}_n$ le sous-ensemble de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ constitué des matrices dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbf{R}$ et dont les termes diagonaux sont les racines du polynôme caractéristique, comptées avec le même ordre de multiplicité.

23) Soit M un élément de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et α et β deux réels quelconques. Alors

A) λ est une valeur propre de M si et seulement si $\alpha\lambda + \beta$ est une valeur propre de $\alpha{}^t\mathrm{M} + \beta\mathrm{I}_n$

B) $\alpha\mathrm{M} + \beta\mathrm{I}_n$ et $\alpha{}^t\mathrm{M} + \beta\mathrm{I}_n$ ont le même polynôme caractéristique, les mêmes valeurs propres et les mêmes espaces propres

C) si M appartient à $\mathscr{D}_n$, alors $\alpha\mathrm{M} + \beta\mathrm{I}_n$ et $\alpha{}^t\mathrm{M} + \beta\mathrm{I}_n$ appartiennent aussi à $\mathscr{D}_n$

D) si M appartient à $\mathscr{D}_n$, et si $\mathrm{M}^2 = \mathrm{M}$, alors $(\alpha\mathrm{M} + \beta\mathrm{I}_n)^2$ appartient aussi à $\mathscr{D}_n$

24) On note $\mathscr{J}_n$ l'ensemble des matrices inversibles appartenant à $\mathscr{D}_n$. On peut affirmer que

A) tout élément de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est la somme de deux éléments de $\mathscr{D}_n$

B) $\mathscr{D}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$

C) $\mathscr{J}_n$ est vide

D) $\mathscr{J}_n$ est dense dans $\mathscr{D}_n$

25) Soit $\mathrm{M} = (m_{ij})$ un élément de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. La trace de ${}^t\mathrm{MM}$ est égale à

A) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}m_{ji}$

B) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} {m_{ij}}^2$

C) $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\right)^2$

D) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}$

26) Soit S un élément de $\mathscr{D}_n$. On suppose de plus que S est symétrique. Alors

A) une telle matrice n'existe pas

B) $\mathrm{S} = \mathrm{I}_n$

C) S est diagonale

D) S est la matrice nulle d'ordre n

27) Soit A dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et antisymétrique. On peut affirmer que

A) A^n est antisymétrique

B) ${}^t\mathrm{AA}$ est diagonalisable

C) la trace de ${}^t\mathrm{AA}$ est nulle

D) si A appartient aussi à $\mathscr{D}_n$, alors $\left({}^t\mathrm{AA}\right)^n$ est la matrice nulle d'ordre n

28) L'ensemble des matrices antisymétriques appartenant à $\mathscr{D}_n$

A) est réduit à la matrice unité

B) est un espace vectoriel de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$

C) contient la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

D) est l'ensemble des matrices carrées diagonales à cœfficients réels

Tournez la page S.V.P.

PARTIE III

29) Soit une série de terme général strictement positif b_n, où n est un entier naturel quelconque. Pour que cette série converge,

A) il est suffisant que la suite de terme général b_n converge vers 0

B) il est nécessaire que la suite de terme général b_n converge vers 0

C) il est nécessaire et suffisant que la suite de terme général $\sum_{k=0}^{n} b_k$ converge vers 0

D) il est suffisant que la suite de terme général $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ converge et que sa limite soit strictement inférieure à 1

30) On pose, pour tout entier naturel n différent de 0, $b_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$. Alors

A) la suite (b_n) est croissante et majorée

B) la suite (b_n) est convergente et sa limite est égale à 1

C) (b_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{n}{n+1} < 1$

D) la série de terme général b_n converge

Dans tout ce qui suit, on note I l'intervalle $[0, 1[$. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on pose, pour tout x dans I, $f_n(x) = a_n x^n(1-x)$, où (a_n) est une suite réelle définie sur $\mathbf{N}^*$. Si elle existe, on note $\|f_n\|_\infty$ la borne supérieure des nombres $f_n(x)$ lorsque x décrit I. En cas de convergence de la série $\sum f_n(x)$, on pose $\mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

31) Dans le cas où (a_n) est la suite constante égale à 1,

A) (f_n) est une suite décroissante

B) (f_n) est une suite de fonctions décroissantes sur I

C) pour tout entier $n \geqslant 1$, $\|f_n\|_\infty$ existe et est égale à 1

D) pour tout entier $n \geqslant 1$, $\|f_n\|_\infty$ existe et est égale à $\dfrac{1}{n+1}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

32) Dans le cas où, pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{1}{2^n}$,

A) $\mathrm{S}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ n'existe pas

B) $\mathrm{S}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ existe et $\mathrm{S}\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2}{3}$

C) la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I

D) la série $\sum f_n(x)$ ne converge pour aucune valeur de x dans I

33) Dans le cas où, pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = (-1)^n$,

A) pour tout x dans I, $f_n(x)$ est la suite géométrique de premier terme $1 - x$ et de raison $-x$

B) pour tout x dans I, $\mathrm{S}(x)$ existe et $\mathrm{S}(x) = \dfrac{x(x-1)}{x+1}$

C) Pour tout x dans I, la série $\sum f_n(x)$ vérifie les hypothèses du théorème spécial des séries alternées

D) la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I

34) Dans le cas où (a_n) est une suite bornée, la série de fonctions $\sum f_n$

A) converge simplement en tout point de I

B) converge uniformément sur I

C) ne converge pas absolument en au moins un point de I

D) converge normalement sur I

35) Dans le cas où (a_n) est une suite de réels décroissante, la série de fonctions $\sum f_n$

A) converge simplement en tout point de I

B) converge uniformément sur I

C) ne converge pas absolument en au moins un point de I

D) converge normalement sur I

Dans tout ce qui suit, on suppose que (a_n) est une suite décroissante de réels positifs.

36) La série de fonctions $\sum f_n$

A) converge simplement en tout point de I

B) converge uniformément sur I

C) est telle que, pour tout $n \geqslant 1$, $||f_n||_\infty = \dfrac{a_n}{n+1}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$

D) converge normalement sur I

37) Dans le cas où, pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = 1 + \dfrac{1}{n}$,

A) la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur I et converge uniformément sur I

B) la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge simplement en aucun point de I

C) la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur I vers la fonction nulle

D) la suite de fonctions dérivées $({f_n}')$ converge uniformément sur I vers la fonction nulle

38) Dans le cas où, pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{1}{n}$,

A) $\mathrm{S}(x)$ existe pour tout x dans I et $\mathrm{S}(x) = (1-x)\ln|x-1|$

B) $\|f_n\|_\infty \overset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{en^2}$

C) il existe x dans I tel que $\mathrm{S}(x)$ n'existe pas

D) $\mathrm{S}(x)$ existe pour tout x dans I et $\lim\limits_{x\to1} \mathrm{S}(x) = 0$

39) Dans le cas où, pour tout $n \geqslant 2$, $a_n = \dfrac{1}{\ln n}$, et $a_1 = 2$,

A) $\left(\dfrac{a_n}{n}\right)$ converge vers 0

B) la série $\sum \dfrac{a_n}{n}$ converge

C) la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I

D) la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I

40) En utilisant uniquement les trois cas précédents (questions 37 à 39), on a démontré en particulier

A) que si une série de fonctions converge normalement sur un intervalle, alors elle converge uniformément sur cet intervalle

B) qu'une série de fonctions peut converger normalement sur un intervalle sans converger uniformément sur cet intervalle

C) que la convergence uniforme d'une série de fonctions sur un intervalle n'entraîne pas sa convergence normale sur cet intervalle

D) que la convergence simple d'une série de fonctions en tout point d'un intervalle n'entraîne pas sa convergence uniforme sur cet intervalle