

# Programme de colles MP 2018.

## Semaine 7

Espaces vectoriels normés - Topologie

- Révisions sur les normes et les distances.
- Suites vectorielles (convergentes, bornées). Suites extraites.
- Comparaison des normes. Cas de la dimension finie.
- Topologie d'un EVN (ouverts, fermés, adhérence, intérieur, frontière)

**PAS de topologie relative au programme de colles de cette semaine.**  
**PAS de compacité au programme de colles de cette semaine.**

### Questions de cours :

1. Exercice 75 de la banque CCP (algèbre)
2. Exercice 88 de la banque CCP (algèbre)
3. Exercice 37 de la banque CCP (dans la question 1) c), on est OBLIGÉ de raisonner par inclusion de boules et en revenant à la définition d'un ouvert...)
4. Exercice 38 de la banque CCP (dans la question 1) b), on est OBLIGÉ de raisonner par inclusion de boules et en revenant à la définition d'un ouvert...)
5. Exercice 44 de la banque CCP
6. Exercice 45 de la banque CCP

---

Détails du cours :

1. Sur la notion de suites extraites.
  - Définition d'une extraction. Exemples. Suite Extraite.
  - Propriétés des suites extraites. Traduction de « $(u_n)$  ne tend pas vers  $\ell$ » et de « $(u_n)$  n'est pas bornée» en termes de suites extraites.
  - Valeurs d'adhérences. Condition suffisante de divergence (\*).
  - Théorème de Bolzano-Weierstrass (\*).
2. Sur la comparaison de normes.
  - Définition d'une norme plus fine qu'une autre.
  - Définition de deux normes équivalentes.
  - Deux normes équivalentes définissent :
    - les mêmes ensembles bornés
    - les mêmes suites convergentes, les mêmes limites
    - les mêmes ouverts, mêmes fermés, mêmes voisinages
  - En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Exemples et inégalités pour les trois normes usuelles dans  $\mathbb{R}^2$ .
  - Contre-exemples de normes non équivalentes en dimension infinie.
3. Sur la topologie d'un espace vectoriel normé.
  - Définition d'un ensemble ouvert, d'un ensemble fermé. Exemples et contre exemples. Dessins.
  - En dimension finie, ces notions sont intrinsèques.
  - Unions / intersections et ouverts / fermés. Exemples et contre exemples.
  - Intérieur, adhérence, frontière. Définitions et propriétés.