Programme de colles MP 2017.
Semaine 7

Espaces vectoriels normés - Topologie

Questions de cours :

1. Exposez vos connaissances sur la notion de suites extraites.
2. Exposez vos connaissances la comparaison de normes.
3. Exposez vos connaissances sur la topologie d'un espace vectoriel normé.
4. Exercice 37 de la banque CCP (dans la question 1) c), on est OBLIGÉ de raisonner par inclusion de boules et en revenant à la définition d'un ouvert...)
5. Exercice 38 de la banque CCP (dans la question 1) b), on est OBLIGÉ de raisonner par inclusion de boules et en revenant à la définition d'un ouvert...)
6. Exercice 44 de la banque CCP
7. Exercice 45 de la banque CCP

Détails des questions de cours :

1. Exposez vos connaissances sur la notion de suites extraites.
    - Définition d'une extraction. Exemples. Suite Extraite.
    - Propriétés des suites extraites. Traduction optimale de (u_n) ne tend pas vers ℓ et de (u_n) n'est pas bornée.
    - Valeurs d'adhérences. Condition suffisante de divergence ($\star$).
    - Théorème de Bolzano-Weierstrass ($\star$).
2. Exposez vos connaissances la comparaison de normes.
    - Définition d'une norme plus fine qu'une autre.
    - Définition de deux normes équivalentes.
    - Deux normes équivalentes définissent :
        - les mêmes ensembles bornés
        - les mêmes suites convergentes, les mêmes limites
        - les mêmes ouverts, mêmes fermés, mêmes voisinages
    - En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Exemples et inégalités pour les trois normes usuelles dans $\mathbb{R}^2$.
    - Exemple de deux normes comparables mais non équivalentes en dimension infinie.
    - Exemple de deux normes non comparables en dimension infinie.
3. Exposez vos connaissances sur la topologie d'un espace vectoriel normé.
    - Définition d'un ensemble ouvert, d'un ensemble fermé. Exemples et contre exemples. Dessins.
    - En dimension finie, ces notions sont intrinsèques.
    - Unions / intersections et ouverts / fermés. Exemples et contre exemples.
    - Intérieur, adhérence, frontière. Définitions et propriétés.
    - Densité. Exemples ($\star$)
    - Compacité. Définition de Bolzano-Weierstrass.
    - En dimension finie, les compacts sont exactement les fermés bornés ($\star$).
    - Soit A compact et $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$. La suite $(a_n)_{\mathbb{N}}$ converge $\Leftrightarrow$ la suite $(a_n)_{\mathbb{N}}$ admet une unique valeur d'adhérence.