Programme de colles MP 2018.
Semaine 5

Réduction des endomorphismes

Questions de cours :

1. Exo 67 banque CCP
2. Exo 73 banque CCP
3. Exo 91 banque CCP
4. Exo 83 banque CCP
5. Exo 69 banque CCP

Détails du contenu du cours :

1. Éléments propres d'un endomorphisme
   - Définition valeur propre, vecteur propre, spectre, espace propre d'une matrice et d'un endomorphisme (invariants de similitude)
   - Les sous espaces propres sont en somme directe ($\star$).
   - Si f et g commutent, tout sous espace propre de f est stable par g ($\star$).
   - Le spectre d'un endomorphisme f est inclus dans l'ensemble des racines de tout polynôme annulateur de f ($\star$).
   - Cas de la dimension finie : polynôme caractéristique d'un endomorphisme.
   - Cas d'un polynôme caractéristique scindé. Spectre, trace et déterminant.
2. Diagonalisation et la trigonalisation d'un endomorphisme et d'une matrice en dimension finie
   - Définition.
   - Premières conditions nécessaires et/ou suffisantes de réduction :
     a. Un endomorphisme f est trigonalisable ssi χ_f est scindé. Cas complexe.
     b. Un endomorphisme f est diagonalisable ssi la somme des sous espaces propres est égale à E.
     c. Un endomorphisme$f$ est diagonalisable ssi χ_f est scindé et si pour toute racine λ de χ_f de multiplicité m_λ, $dim(E_\lambda) = m_\lambda$.
     d. Si χ_f est scindé à racines simples, alors f est diagonalisable
   - Réduire une matrice 3×3 **RAPIDEMENT** ($\star$) (maximum 10min pour déterminer valeurs propres et espaces propres)
3. Polynômes annulateurs d'un endomorphisme en dimension quelconque
   - Définition de l'idéal annulateur et du polynôme minimal s'il existe.
   - Sous algèbre commutative $\mathbb{K}[f]$
   - Lemme des noyaux ($\star$)
   - Caractérisation de la trigonalisabilité par polynôme minimal scindé.
   - Caractérisation de la diagonalisabilité par polynôme minimal scindé à racines simples.