Programme de colles MP 2017.
Semaine 5

Réduction (suite et fin...)

Au programme : toute l'algèbre linéaire (y compris le lemme des noyaux).

Questions de cours :

1. Exposez vos connaissances sur l'étude des éléments propres d'un endomorphisme
2. Exposez vos connaissances sur la diagonalisation et la trigonalisation d'un endomorphisme et d'une matrice en dimension finie.
3. Exposez vos connaissances sur le polynôme minimal d'un endomorphisme en dimension quelconque
4. Exo 62 banque CCP
5. Exo 67 banque CCP
6. Exo 73 banque CCP

Détails des questions de cours :

1. Éléments propres d'un endomorphisme
   - Définition valeur propre, vecteur propre, spectre, espace propre d'une matrice et d'un endomorphisme (invariants de similitude)
   - Les sous espaces propres sont en somme directe ($\star$).
   - Si f et g commutent, tout sous espace propre de f est stable par g ($\star$).
   - Le spectre d'un endomorphisme f est inclus dans l'ensemble des racines de tout polynôme annulateur de f ($\star$).
   - Cas de la dimension finie : polynôme caractéristique d'un endomorphisme.
   - Cas d'un polynôme caractéristique scindé. Spectre, trace et déterminant.
2. Diagonalisation et la trigonalisation d'un endomorphisme et d'une matrice en dimension finie
   - Définition.
   - Premières conditions nécessaires et/ou suffisantes de réduction :
     a. Un endomorphisme f est trigonalisable ssi χ_f est scindé. Cas complexe.
     b. Un endomorphisme f est diagonalisable ssi la somme des sous espaces propres est égale à E.
     c. Un endomorphisme$f$ est diagonalisable ssi χ_f est scindé et si pour toute racine λ de χ_f de multiplicité m_λ, $dim(E_\lambda) = m_\lambda$.
     d. Si χ_f est scindé à racines simples, alors f est diagonalisable
   - Réduire une matrice 3×3 **RAPIDEMENT** ($\star$) (maximum 10min pour déterminer valeurs propres et espaces propres)
3. Polynôme minimal d'un endomorphisme en dimension quelconque
   - Définition
   - Sous algèbre commutative $\mathbb{K}[f]$
   - Lemme des noyaux ($\star$)
   - Caractérisation de la trigonalisabilité par polynôme minimal scindé.
   - Caractérisation de la diagonalisabilité par polynôme minimal scindé à racines simples.

Exercices vus en classe : 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25.