Programme de colles MP 2018.
Semaine 4

- Révisions : algèbre linéaire, polynômes.
- Révisions MPSI : matrices - déterminants
- Polynômes annulateurs d'une matrice

Questions de cours :

1. Présentez la définition et les principales propriétés du déterminant d'une matrice carrée.
2. Présentez vos connaissances sur l'idéal des polynômes annulateurs d'une matrice carrée.
3. Exo 63 banque CCP
4. Exo 64 banque CCP
5. Exo 65 banque CCP
6. Exo 87 banque CCP

---

1. Déterminant d'une matrice carrée
    - Définition du déterminant d'une matrice carrée $A = (a_{i,j})$: $\det(A) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$.
    - Propriétés découlant de cette formule : déterminant de ${}^tA$ ($\star$), de λA ($\star$), de I_n ($\star$), $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ (admis), déterminant d'une matrice inversible et de A^{-1} ($\star$),
    - Déterminant d'une famille de vecteurs : c'est une forme n-linéaire alternée (donc antisymétrique).
    - Opérations élémentaires sur les lignes et colonnes et déterminant.
    - Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs ($\star$), d'une triangulaire.
    - Cofacteur $A_{i,j}$, mineur, formule de développement selon une rangée.
    - Application à l'expression de l'inverse d'une matrice inversible (comatrice)
    - Déterminant de Vandermonde ($\star$).
2. Idéal des polynômes annulateurs d'une matrice carrée
    - Définition du polynôme caractéristique $\sum_{k=0} c_i X^i$. Le polynôme caractéristique est unitaire ($\star$). Coefficients c_0, c_{n-1} ($\star$).
    - Polynôme caractéristique d'une matrice scalaire ($\star$), d'une triangulaire ($\star$), d'une triangulaire par blocs ($\star$), de la transposée ($\star$).
    - Polynôme caractéristique d'une matrice compagne ($\star$).
    - Théorème de Cayley Hamilton.
    - Définition du polynôme minimal. $\mu_M | \chi_M$. deg $\mu_M \leq$ deg χ_M.
    - Polynôme minimal d'une matrice scalaire, d'une diagonale par blocs, d'une diagonale, d'une triangulaire à coefficients diagonaux distincts.
    - $\mu_M = \mu_{{}^tM}$.
    - Valeur propre, vecteur propre d'une matrice. Spectre de M et racines de χ_M et de μ_M.
    - Si d est le degré du polynôme minimal de M, alors $(I_n, M, M^2, \ldots, M^{d-1})$ est une base de l'algèbre commutative $\mathbb{K}[M]$ ($\star$).