Programme de colles MP 2017.
Semaine 3

Matrices - déterminants - polynômes annulateurs d'une matrice

Questions de cours :

1. Présentez la définition et les principales propriétés du déterminant d'une matrice carrée.
2. Présentez vos connaissances sur l'idéal des polynômes annulateurs d'une matrice carrée.
3. Exo 60 banque CCP
4. Exo 63 banque CCP sauf la première partie de la dernière question sur la diagonalisabilité mais en conservant la question sur la valeur propre nulle.
5. Exo 64 banque CCP
6. Exo 94 banque CCP (pour la question 3.b. on demande d'exposer la méthode générale)

---

1. Déterminant d'une matrice carrée
   - Définition du déterminant d'une matrice carrée $A = (a_{i,j})$: $\det(A) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$.
   - Propriétés découlant de cette formule : déterminant de ${}^tA$ ($\star$), de λA ($\star$), de I_n ($\star$), $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ (admis), déterminant d'une matrice inversible et de A^{-1} ($\star$),
   - Déterminant d'une famille de vecteurs : c'est une forme n-linéaire alternée (donc antisymétrique).
   - Opérations élémentaires sur les lignes et colonnes et déterminant.
   - Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs ($\star$), d'une triangulaire.
   - Cofacteur $A_{i,j}$, mineur, formule de développement selon une rangée.
   - Application à l'expression de l'inverse d'une matrice inversible (comatrice)
   - Déterminant de Vandermonde ($\star$).
2. Idéal des polynômes annulateurs d'une matrice carrée
   - Définition du polynôme caractéristique $\sum_{k=0} c_i X^i$. Le polynôme caractéristique est unitaire ($\star$). Coefficients c_0, c_{n-1} ($\star$).
   - Polynôme caractéristique d'une matrice scalaire ($\star$), d'une triangulaire ($\star$), d'une triangulaire par blocs ($\star$), de la transposée ($\star$).
   - Polynôme caractéristique d'une matrice compagne ($\star$).
   - Théorème de Cayley Hamilton (admis).
   - Définition du polynôme minimal. $\mu_M | \chi_M$. deg $\mu_M \leq$ deg χ_M.
   - Polynôme minimal d'une matrice scalaire, d'une diagonale par blocs, d'une diagonale, d'une triangulaire à coefficients diagonaux distincts.
   - $\mu_M = \mu_{{}^tM}$.
   - Valeur propre, vecteur propre d'une matrice ($\star$). (la démonstration circulaire du point 8 du cours est à savoir refaire).
   - Si d est le degré du polynôme minimal de M, alors $(I_n, M, M^2, \ldots, M^{d-1})$ est une base de l'algèbre commutative $\mathbb{K}[M]$ ($\star$).

Exercices vus en classe :
Matrices et Déterminants : 1-2-3-5
Polynômes annulateurs : 1-2-3-4-5-6