

Programme de colles MP 2018.

Semaine 2

Anneaux - Corps - Algèbres - Polynômes

Questions de cours :

1. Présentez vos connaissances sur les anneaux et les idéaux en illustrant par des exemples.
 2. Présentez vos connaissances sur l'arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$.
 3. Présentez vos connaissances sur l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
 4. Exo 66 banque CCP
 5. Exo 86 banque CCP
 6. Exo 94 banque CCP
-

1. Anneaux et idéaux

- Définition d'un anneau, d'un sous anneau.
- Groupe des inversibles d'un anneau.
- Définition d'un morphisme d'anneaux.
- Définition d'un idéal. Le noyau d'un morphisme d'anneaux est un idéal (★)
- Intersection d'une famille d'idéaux. Idéal engendré. Idéal monogène.
- Définition de la divisibilité en langage d'idéaux. Éléments associés.
- Les idéaux de \mathbb{Z} sont les $n\mathbb{Z}$. Les idéaux de $\mathbb{K}[X]$ sont les idéaux monogènes (★).

2. Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

- Définition d'un PGCD, d'un PPCM (dans \mathbb{Z} ou dans $\mathbb{K}[X]$) en langage des idéaux.
- Définition de polynômes premiers entre eux.
- Théorème de Bézout (★).
- Théorème de Gauss (★).
- Polynômes irréductibles sur \mathbb{K} . Tout polynôme de degré 1 est irréductible sur \mathbb{K} (★).
- Polynômes irréductibles sur \mathbb{C} puis sur \mathbb{R} (sans démonstration).

3. L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

- Inversibles, réguliers et générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. (★)
- Groupe multiplicatif $((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*, \times)$
- Théorème d'Euler et petit théorème de Fermat (★).
- Théorème des restes chinois, version anneaux.
Corollaire : si n et p sont premiers entre eux, $\varphi(np) = \varphi(n)\varphi(p)$ (sans démonstration).
- Calcul de $\varphi(p^r)$ avec p premier.
- Calculer de $\varphi(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ (★).