

# Programme de colles MP 2017.

## Semaine 2

Anneaux - Corps - Algèbres - Polynômes

### Questions de cours :

1. Présentez vos connaissances sur les anneaux et les idéaux en illustrant par des exemples.
  2. Présentez vos connaissances sur l'arithmétique dans  $\mathbb{K}[X]$ .
  3. Présentez vos connaissances sur les racines d'un polynôme.
  4. Présentez vos connaissances sur l'anneau  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .
  5. Exo 66 banque CCP
  6. Exo 85 banque CCP
  7. Exo 90 banque CCP
- 

#### 1. Anneaux et idéaux

- Définition d'un anneau, d'un sous anneau.
- Groupe des inversibles d'un anneau.
- Définition d'un morphisme d'anneaux.
- Définition d'un idéal. Le noyau d'un morphisme d'anneaux est un idéal (★)
- Intersection d'une famille d'idéaux. Idéal engendré. Idéal monogène.
- Définition de la divisibilité en langage d'idéaux. Éléments associés.
- Les idéaux de  $\mathbb{Z}$  sont les  $n\mathbb{Z}$ . Les idéaux de  $\mathbb{K}[X]$  sont les idéaux monogènes (★).

#### 2. Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

- Définition d'un PGCD, d'un PPCM (dans  $\mathbb{Z}$  ou dans  $\mathbb{K}[X]$ ) en langage des idéaux.
- Définition de polynômes premiers entre eux.
- Théorème de Bézout (★).
- Théorème de Gauss (★).
- Polynômes irréductibles sur  $\mathbb{K}$ . Tout polynôme de degré 1 est irréductible sur  $\mathbb{K}$  (★).
- Polynômes irréductibles sur  $\mathbb{C}$  puis sur  $\mathbb{R}$  (sans démonstration).

#### 3. Racines de polynômes

- Formules de Mac-Laurin et Taylor (sans démonstration).
- Racine d'un polynôme.
- Ordre de multiplicité d'une racine : définition et caractérisations (sans démonstration).

#### 4. L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

- Inversibles, réguliers et générateurs de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . (★)
- Groupe multiplicatif  $((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*, \times)$
- Théorème d'Euler et petit théorème de Fermat (★).
- Théorème des restes chinois, version anneaux.  
Corollaire : si  $n$  et  $p$  sont premiers entre eux,  $\varphi(np) = \varphi(n)\varphi(p)$  (sans démonstration).
- Calcul de  $\varphi(p^r)$  avec  $p$  premier.
- Calculer de  $\varphi(n)$  pour  $n \in \mathbb{N}$  (★).

Exercices vus en classe :

Exercices 1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-13 du chapitre 2 (anneaux-corps-algèbres)

Exercices 1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-12-13-14 du chapitre 2bis (polynômes)