

# Programme de colles MP 2017.

## Semaine 17

### Espaces euclidiens et préhilbertiens (révisions).

- Produits scalaires, orthogonalité, projection orthogonale, famille orthonormale (procédé d'orthonormalisation)
- Endomorphismes orthogonaux
- Endomorphismes symétriques.

### Séries entières (début)

- Définition, domaine de convergence, rayon de convergence.
  - Somme et produit de deux séries entières.
  - Régularité d'une série entière sur son disque ouvert de convergence.
- Donner un calcul de rayon de convergence d'une série entière.

### Questions de cours :

1. Exposez vos connaissances sur les espaces euclidiens et préhilbertiens en utilisant des exemples et des contre-exemples.
  2. Exposez vos connaissances sur les endomorphismes orthogonaux et symétriques.
  3. Exercice 15 de la banque CCP
  4. Exercice 18 de la banque CCP
  5. Exercice 20 de la banque CCP
  6. Le calcul du rayon de convergence d'une série entière.
- 

### Détails des questions de cours :

1. Exposez vos connaissances sur les espaces euclidiens et préhilbertiens.
  - Définition d'un produit scalaire et d'une norme euclidienne.
  - Formules usuelles.
  - Définition de  $A$  et  $B$  orthogonaux. Propriétés de l'orthogonal à une partie de  $E$ . Exemples et contre-exemples.
  - Un sev de DF admet un supplémentaire orthogonal.
  - Théorème de la projection orthogonale sur un sev admettant un supplémentaire orthogonal. Propriétés.
  - Définition d'une famille orthonormale. Calculs dans une base orthonormale.
  - Définition d'une suite totale (exemple : la suite des polynômes de LEGENDRE dans  $C([0, 1], \mathbb{R})$ ).
  - Inégalité de BESSEL et égalité de PARSEVAL.
2. Exposez vos connaissances sur les endomorphismes orthogonaux et symétriques.
  - Définition d'un endomorphisme orthogonal (isométrie).
  - Propriétés.
  - $O(E)$  est engendré par les réflexions.
  - Description de  $O(E)$  lorsque  $\dim(E) = 2$  (rotation/réflexion) ou 3 (rotation/anti-rotation).
  - Théorème de diagonalisation par blocs.
  - Définition d'un endomorphisme symétrique. Exemples.
  - Propriétés.
  - Théorème spectral.