

Programme de colles MP 2018.

Semaine 12

Séries numériques et vectorielles - Révisions

Même programme que la semaine précédente.

On ajoute :

- Séries doubles :
 - Définitions : somme en lignes, en colonnes. convergence, divergence
 - Théorème de Fubini pour les séries absolument convergentes et corollaires :
 - Corollaire 1 : sommation sur un triangle et par diagonales pour les séries doubles absolument convergentes.
 - Corollaire 2 : Produit de Cauchy pour les séries simples absolument convergentes. Exemples sur des séries entières de référence. Formule du binôme négatif.
 - Corollaire 3 : théorème de permutation des termes d'une série simple absolument convergente.
- Séries exponentielles dans une algèbre normée de dimension finie.

Intégrales généralisées

- Définitions, critères de convergences de Riemann à distance finie et à distance infinie.
- Techniques de calculs (IPP, changement de variables). Utilisation d'un crochet généralisé.
- Intégrabilité et théorèmes de comparaison.

Questions de cours :

1. Présentez vos connaissances sur les séries exponentielles dans une algèbre normée de dimension finie.
 2. Pratique de l'IPP généralisée et/ou du changement de variables généralisé : il est conseillé dans un premier temps de travailler sur un segment puis de faire tendre les bornes vers les bornes généralisées. Sinon, l'utilisation d'un crochet généralisé doit être systématiquement justifié.
 3. Citer la formule du produit de Cauchy.
Application : déterminer le développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^2}$ et $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^3}$ pour $x \in]-1, 1[$.
 4. Exercice 28 de la banque CCP
 5. Exercice 29 de la banque CCP : uniquement questions 1.) et 2.)
-

Présentez vos connaissances sur les séries exponentielles dans une algèbre normée de dimension finie en illustrant par des exemples.

- Existence/Définition de l'exponentielle dans une algèbre A de dimension finie. Exemples (★)
- $\exp(0_A) = 1_A$ (★)
- Si $ab = ba$, $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$ par produit de Cauchy (★)
- $\exp(a)$ est inversible d'inverse $\exp(-a)$ (★)
- si $A = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\exp({}^t M) = {}^t \exp(M)$ (★)
- si $A = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(\exp(M)) = e^{\text{Tr}(M)}$ (★)
- si $A = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\exp(M) \in \mathbb{K}[M]$ (★)
- \exp est continue sur A (admis)
- Soit $a \in A$. l'application $f : t \mapsto \exp(ta)$ est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(t) = a \exp(ta) = \exp(ta)a$ (admis)