

# Programme de colles MP 2016.

## Semaine 12

### Séries numériques et vectorielles - Révisions

Étant donné les similitudes entre les notions de séries et d'intégrales généralisées, il est tout à fait possible de mélanger les deux notions dans un même exercice (par exemple sur le théorème d'intégration terme à terme).

### Intégrales généralisées

Définitions, critères de convergences, théorèmes de comparaison.

Intégration terme à terme pour une série de fonctions lorsque  $\sum_n \int_I |f_n| < +\infty$ .

Pas de convergence dominée cette semaine.

### Questions de cours :

1. Présentez vos connaissances sur les intégrales généralisées en illustrant par des exemples et contre-exemples.
  2. Pratique de l'IPP généralisée et/ou du changement de variables généralisé : il est conseillé dans un premier temps de travailler sur un segment puis de faire tendre les bornes vers les bornes généralisées.
  3. Exercice 19 de la banque CCP
  4. Exercice 28 de la banque CCP
  5. Exercice 49 de la banque CCP
- 

Présentez vos connaissances sur les intégrales généralisées en illustrant par des exemples et contre-exemples. On présentera les résultats dans le cas d'un intervalle  $[a, +\infty[$ .

- Intégrale généralisée sur un intervalle de la forme  $[a, +\infty[$ . Convergence. Notation  $\int_a^{\rightarrow+\infty} f$ .
- Exemples : critère de Riemann à distance finie et à distance infinie (\*).
- Linéarité et positivité de l'intégrale généralisée
- Théorème de l'intégrale nulle, théorème fondamental de l'analyse.
- Intégrabilité sur un intervalle de la forme  $[a, +\infty[$ . Définition d'une fonction intégrable.

Notation  $f \in L^1(I, R)$ . Si  $f$  est intégrable, alors  $\int_a^{\rightarrow+\infty} f$  converge (sous espace vectoriel, mais pas stable par produit !).

- Théorème de comparaison des intégrales généralisées de fonctions positives. Intégration des relations de comparaison.