Programme de colles MP 2016.
Semaine 1

Questions de cours :

1. "Présentez vos connaissances sur la structure de groupe et des sous groupes. Illustrez par des exemples."
2. "Présentez vos connaissances sur les morphismes de groupes. Illustrez par des exemples."
3. "Présentez vos connaissances sur le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$."
4. "Présentez vos connaissances sur les groupes monogènes et cycliques."

Déroulement de la question de cours :

Pour chaque étudiant, l'interrogateur choisit une des quatre questions de cours.
Après en avoir pris connaissance, l'étudiant commence par écrire au tableau différents items parmi ceux qui ont été vus en cours (voir détails plus loin) : pour l'instant, aucun détail n'est demandé.
Après un petit dialogue entre l'interrogateur et l'étudiant à propos de ces items (par exemple en cas d'oubli et/ou d'ajout), l'interrogateur choisit un ou plusieurs items et demande à l'étudiant d'en préciser :

- ▷ uniquement son énoncé exact et/ou sa version en langage formel,
- ▷ ou bien uniquement sa démonstration si elle est exigible,
- ▷ ou bien son énoncé puis sa démonstration si elle est exigible.

Pas de questions ou d'exercice sur le groupe symétrique pour l'instant.

Détails des items correspondants aux quatre questions de cours
Le symbole ($\star$) indique que la démonstration du résultat est exigible.

1. Structure de groupe, sous groupe,
   - loi de composition interne associative - définition d'un groupe.
   - unicité du neutre et du symétrique ($\star$).
   - produit cartésien de groupes ($\star$).
   - définition et caractérisation d'un sous-groupe ($\star$).
   - intersection de sous groupes ($\star$)
   - sous groupe engendré par une partie.
   - sous groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ ($\star$).
   - sous groupes de $(\mathbb{R}, +)$ (énoncé sans démonstration).
   - théorème de Lagrange général (énoncé sans démonstration)
2. Morphismes de groupes
   - envoie le neutre sur le neutre ($\star$), le symétrique sur le symétrique ($\star$)
   - définition de l'image et du noyau. l'image et le noyau d'un morphisme sont des sous groupes ($\star$).
   - condition d'injectivité d'un morphisme
   - la composée de deux morphismes est un morphisme ($\star$)
   - la réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme ($\star$)
3. Le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
   - relation de congruence. Classes modulo n. L'addition et la multiplication dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont bien définies ($\star$).
   - théorème chinois version groupe (énoncé sans démonstration).
   - générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ($\star$).

4. Groupes monogènes et cycliques

- définition, ordre fini/infini d'un élément (cardinal de $< a >$).
- si a est d'ordre fini, $O(a)$ est égal au plus petit entier strictement positif m tel que $a^m = e$.
- si a est d'ordre fini n, alors pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on a $a^n = e \Longleftrightarrow n|p$
- cas particulier du théorème de Lagrange : dans un groupe fini commutatif, pour tout $a \in G$, $a^n = e$ ($\star$).
- structures des groupes monogènes.
- sous groupes finis de $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ ($\star$).
- indicatrice d'Euler : $\varphi(n)$ désigne le nombre de générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ou de $\mathbb{U}_n$.
- $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.

Exercices vus en classe :
Exercices 1-2-3-4-5-6-8-10-11-13-14-15-17-21-22-30