2018

PARTIE 3

Exercice 1

Dans cet exercice, on introduit les fonctions f définies sur $\mathbb{R}^+$ de la façon suivante : $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite de réels strictement positifs.

$$f(0) = a_0$$
$$\forall n \in \mathbb{N} \ \ \forall t \in [n; n+1[\ \ f(t) = a_n$$

A chaque fonction f, on associe sa fonction transformée $T(f)$ définie par $T(f)(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt$ où $p \in \mathbb{R}^{+*}$.
On supposera que les fonctions f envisagées sont telles que l'intégrale précédente est convergente pour tout réel p appartenant à un intervalle du type $]\alpha, +\infty[$ avec $\alpha > 0$.
Pour tout β réel positif, on définit sur $\mathbb{R}^+$ la fonction translatée de f : $f_\beta : t \to f(\beta + t)$.

Question 27 On a alors :

A) $T(f_1)(p) = \int_1^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt$

B) $T(f_1)(p) = \int_{-1}^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt$

C) $T(f_1)(p) = e^p \int_{-1}^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt$

D) $T(f_1)(p) = e^p \int_1^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt$

Question 28 On peut dire que :

A) $T(f_1)(p) = a_0 e^p T(f)(p) - a_1 \dfrac{e^p}{p}$

B) $T(f_1)(p) = a_1 e^p T(f)(p) - a_0 \dfrac{e^p}{p}$

C) $T(f_1)(p) = e^p T(f)(p) - a_1 \dfrac{e^p - 1}{p}$

D) $T(f_1)(p) = e^p T(f)(p) - a_0 \dfrac{e^p - 1}{p}$

Question 29 On peut écrire :

A) $T(f_2)(p) = a_0 e^{2p} T(f)(p) - a_1 \frac{e^p}{p} + a_2 \frac{e^p - 1}{p}$

B) $T(f_2)(p) = a_2 e^{2p} T(f)(p) - a_1 \frac{e^p}{p} + a_0 \frac{e^p - 1}{p}$

C) $T(f_2)(p) = \frac{a_0 e^{2p} T(f)(p)}{p} - (e^p - 1)(a_0 e^p - a_1)$

D) $T(f_2)(p) = e^{2p} T(f)(p) - \frac{(e^p - 1)}{p}(a_0 e^p + a_1)$

Question 30 Soit r un réel strictement positif . On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ de la façon suivante :

$$g(0) = 1$$
$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; \forall t \in [n; n+1[\quad g(t) = r^n$$

A chaque fonction g, on associe sa fonction transformée $T(g)$.

A) $T(g)(p) = \frac{p(1 + e^r)}{1 - e^{-r}}$

B) $T(g)(p) = \frac{(1 + e^r)}{p(1 - e^{-r})}$

C) $T(g)(p) = \frac{(1 - e^{rp})}{p(1 - e^{-p})}$

D) $T(g)(p) = \frac{(1 - e^{-p})}{p(1 - re^{-p})}$

Soit la suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0 \;\; avec \;\; a_0 = 0 \;\; et \;\; a_1 = 1$$

A chaque suite on associe la fonction f définie précédemment. Cette fonction vérifie sur chaque intervalle $[n, n+1[$ avec $n \in \mathbb{N}$, la relation

$$(E) : f_2 - 5f_1 + 6f = 0$$

Question 31 On déduit des relations précédentes la valeur de $T(f)(p)$:

A) $T(f)(p) = \frac{p(1 - e^p)}{e^{-p}} \left(\frac{1}{2 - e^p} + \frac{1}{3 - e^p}\right)$

B) $T(f)(p) = \frac{p(1 - e^p)}{e^{-p}} \left(\frac{1}{e^p + 3} + \frac{1}{e^p + 2}\right)$

C) $T(f)(p) = \frac{(e^p - 1)}{p} \left(\frac{1}{e^p - 3} - \frac{1}{e^p - 2}\right)$

D) $T(f)(p) = \frac{(e^p - 1)}{p} \left(\frac{3}{e^p - 3} - \frac{2}{e^p - 2}\right)$

Question 32 On peut en déduire la valeur du terme général de la suite (a_n) sous la forme :

A) $a_n = \frac{1}{2}(4^n - 2^n)$

B) $a_n = (2^{2n} - 3^n)$

C) $a_n = (3^n - 2^n)$

D) $a_n = (2^n - 1)$

On considère maintenant les deux suites réelles (p_n) et (q_n) définies par les relations de récurrences suivantes avec $(p_0 = q_0 = 1)$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} p_{n+1} = p_n + 2q_n \\ \\ q_{n+1} = p_n + q_n \end{cases}$$

Question 33 On a alors les relations suivantes.

A) $p_{n+2} = p_n - 3p_{n+1}$

B) $p_{n+2} = p_n + 2p_{n+1}$

C) $q_{n+2} = q_n + 2q_{n+1}$

D) $q_{n+2} = q_n - 3q_{n+1}$

Question 34 On associe comme précédemment pour la suite (a_n) , à chacune des suites (p_n) et (q_n) une fonction. On désigne par h la fonction associée à la suite (p_n) et par $T(h)$ sa transformée.On a :

A) $T(h)(p)(e^{2p} + 3e^p - 1) - \dfrac{e^p(1 - e^{-2p})(1 - e^p)}{p} = 0$

B) $T(h)(p)(e^{2p} + 3e^p - 1) - \dfrac{e^{-p}(1 - e^{-2p})(1 - e^p)}{2p} = 0$

C) $T(h)(p)(e^{2p} - 2e^p - 1) - \dfrac{e^p(1 - e^{-2p})(1 - e^p)}{p} = 0$

D) $T(h)(p)(e^{2p} - 2e^p - 1) - \dfrac{e^p(1 - e^{-p})(1 + e^p)}{p} = 0$

Question 35 Dans la suite, on définit la suite (v_n) par : $v_n = \dfrac{p_n}{q_n}$ pour tout entier naturel n.On peut conclure :

A) $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 2\sqrt{2}$

B) $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1 + \sqrt{2}$

C) $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \sqrt{2} - 1$

D) $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \sqrt{2}$

Exercice 2

u_0 et a étant deux réels strictement positifs, on considère maintenant la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n})$$

On associe naturellement à cette suite la fonction f définie pour tout $x > 0$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}(x + \dfrac{a}{x})$.

Question 36 On peut dire que :

A) La courbe de f admet pour asymptote la droite d'équation $y = x/a$.

B) $\forall x > 0, f(x) \geq 0$

C) f admet un maximum en $x = \sqrt{a}$ et $f(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$

D) $\forall x > 0, f^{'}(x) \geq 0$

Question 37 On peut écrire que :

A) La suite (u_n) est croissante pour $u_0 > \sqrt{a}$ et décroissante pour $u_0 < \sqrt{a}$

B) La suite (u_n) est décroissante pour $u_0 > \sqrt{a}$ et croissante pour $u_0 < \sqrt{a}$

C) Quel que soit u_0, la suite (u_n) est croissante

D) Quel que soit u_0, la suite (u_n) est décroissante

Question 38 En calculant les expressions : $E = u_{n+1}^2 - a$ et $F = u_{n+1} - \sqrt{a}$, on obtient :

A) $E = (\frac{u_n^2 + a}{2u_n})^2$ et $F = \frac{u_n}{2}(u_n - \sqrt{a})^2$

B) $E = (\frac{u_n^2 - a}{2u_n})^2$ et $F = \frac{u_n}{2}(u_n + \sqrt{a})^2$

C) $E = (\frac{u_n^2 - a}{2u_n})^2$ et $F = \frac{1}{2u_n}(u_n + \sqrt{a})^2$

D) $E = (\frac{u_n^2 - a}{2u_n})^2$ et $F = \frac{1}{2u_n}(u_n - \sqrt{a})^2$

Question 39 On peut dire que :

A) La suite (u_n) est croissante et convergente seulement si $u_0 > \sqrt{a}$

B) La suite (u_n) est décroissante et convergente seulement si $u_0 > \sqrt{a}$

C) $\forall u_0 \neq \sqrt{a}$, la suite (u_n) est croissante et convergente

D) $\forall u_0 \neq \sqrt{a}$, la suite (u_n) est décroissante et convergente

Question 40 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

On définit la suite matricielle (M_n) par : $M_0 = A$ et $\forall n \in \mathbb{N}, M_{n+1} = \frac{1}{2}(M_n + AM_n^{-1})$
On obtient alors :

A) $\lim\limits_{n \to +\infty} M_n = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 2 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

B) $\lim\limits_{n \to +\infty} M_n = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$

C) $\lim\limits_{n \to +\infty} M_n = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

D) $\lim\limits_{n \to +\infty} M_n = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

PARTIE 3.

Le but de ce problème est d'étudier quelques propriétés liées à l'intégration ou à la dérivation de la fonction polynômiale : $x \to (x^2-1)^n$.

Propriétés liées à l'intégration

Dans un premier temps, on cherche l'expression générale de l'intégrale : $J_n = \int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Question 20 En intégrant $J = \int_{-1}^{1} x^2(1-x^2)^{n-1}dx$ on obtient :

A) $J = (2n+1)J_n$

B) $J = 2nJ_n$

C) $J = \dfrac{1}{2n+1}J_n$

D) Pour n non nul, $J = \dfrac{1}{2n}J_n$

Question 21 En calculant ensuite la différence $J_{n-1} - J_n$ pour n non nul, on obtient la relation de récurrence suivante.

A) $J_n = \dfrac{2n-1}{2n}J_{n-1}$.

B) $J_n = \dfrac{2n+1}{2n-1}J_{n-1}$.

C) $J_n = \dfrac{2n}{2n+1}J_{n-1}$.

D) $J_n = \dfrac{2n}{2n-1}J_{n-1}$.

Question 22 On obtient pour $I_n = \int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx$:

A) $I_n = (-1)^n 2^{(2n+1)} \dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2}$

B) $I_n = (-1)^n 2^{(2n)} \dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2}$

C) $I_n = (-1)^n 2^{(2n+1)} \dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}$

D) $I_n = (-1)^n 2^{(2n)} \dfrac{(2n)!}{((n+1)!)^2}$

Propriétés liées à la dérivation

Question 23 On définit dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes $P_n = (X^2-1)^n$ et $L_n = \dfrac{d^n}{dX^n}(X^2-1)^n$. Avec les conventions habituelles, on prendra $L_0 = 1$.
On peut alors dire que :

A) Le terme dominant de L_n est $\dfrac{(2n+1)!}{((n+1)!)}X^{n+1}$.

B) L_n est toujours un polynôme pair.

C) L_n a la même parité que $n+1$.

D) L_n a la même parité que n.

Question 24 A partir de la définition de L_n, on peut écrire :

A) $L_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)...1} \frac{d^k}{dX^k}(X-1)^n \frac{d^{n-k}}{dX^{n-k}}(X+1)^n$

B) $L_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)...1} \frac{d^k}{dX^k}(X-1)^n \frac{d^{n-k}}{dX^{n-k}}(X+1)^n$

C) $L_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{n(n-1)...(n-k)}{k(k-1)(k-2)...1} \frac{d^k}{dX^k}(X-1)^n \frac{d^{n-k}}{dX^{n-k}}(X+1)^n$

D) $L_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{n(n-1)...(n-k)}{k(k-1)(k-2)...1} \frac{d^k}{dX^k}(X-1)^n \frac{d^{n-k}}{dX^{n-k}}(X+1)^n$

On en déduit alors que pour tout entier naturel n :

Question 25

A) $L_n(1) = L_n(-1)$

B) $L_n(1) = 0$

C) $L_n(1) = n!$

D) $L_n(1) = 2^n n!$

Question 26 On pose $P_n^{(k)} = \frac{d^k}{dX^k} P_n$.En calculant $P_n^{(1)}$ et $P_n^{(2)}$, on constate que :

A) $P_n^{(1)}$ et $P_n^{(2)}$ n'ont pas de racines autres que 1 et -1 dans $[-1, 1]$.

B) $P_n^{(1)}$ a une racine dans $]-1, 1[$ et $P_n^{(2)}$ n'a pas de racines dans $]-1, 1[$.

C) $P_n^{(2)}$ a une racine double dans $]-1, 1[$.

D) $P_n^{(2)}$ a deux racines symétriques dans $]-1, 1[$.

Question 27 On suppose que pour $k > 2$, $P_n^{(k-1)}$ admet $k-1$ racines X_i telles que :

$$-1 < X_1 < X_2 < ... < X_{k-1}$$

A) L'hypothèse est impossible car les seules racines de $P_n^{(k-1)}$ sont 1 et -1.

B) On peut appliquer le théorème de Rolle et on constate que $P_n^{(k)}$ s'annule alors $k+1$ fois dans $[-1, 1]$

C) On peut appliquer le théorème de Rolle et on constate que $P_n^{(k)}$ s'annule alors $k-1$ fois dans $]-1, 1[$

D) On peut appliquer le théorème de Rolle et on constate que $P_n^{(k)}$ s'annule alors k fois dans $]-1, 1[$

Question 28 On peut donc en déduire que :

A) Pour tout n, $L_n(1) = L_n(-1)$.

B) L_n est scindé sur $\mathbb{R}$ et que ses racines sont simples toutes dans $]-1, 1[$.

C) Si n est impair, alors les racines de L_n sont symétriques.

D) Si n est pair, alors L_n admet 0 comme racine.

Question 29 En calculant $P_{n+1}^{(1)}$ et $P_{n+1}^{(2)}$, pour n non nul, on obtient la relation :

A) $P_{n+1}^{(2)} = 2(2n+1)^2 P_n + 4n(n+1)P_{n-1}$.

B) $P_{n+1}^{(2)} = (n+1)^2 P_{n-1} + 4n(n+1)P_n$.

C) $P_{n+1}^{(2)} = 2(2n+1)(n+1)P_n + 4n(n+1)P_{n-1}$.

D) $P_{n+1}^{(2)} = (2n-1)(n+1)P_n - 4n(n+1)P_{n-1}$.

Question 30 En dérivant n fois $P_{n+1}^{(1)}$, on obtient pour n non nul :

A) $L_{n+1} = 2(n+1)XL_n + 2(n+1)X^2 P_n^{(n-1)}$.

B) $L_{n+1} = 2(n+1)XL_n + 2(n+1)(n-1)^2 P_n^{(n-1)}$.

C) $L_{n+1} = 2(n+1)XL_n + 2n(n+1)P_n^{(n-1)}$.

D) $L_{n+1} = 2(n+1)XL_n + 2(n-1)(n+1)P_n^{(n-1)}$.

Tournez la page S.V.P.

Question 31 En dérivant $n-1$ fois l'expression de $P_{n+1}^{(2)}$ obtenue précédemment, on obtient pour $n \in \mathbb{N}^*$:

A) $L_{n+1} = 2(2n+1)^2 P_n^{(n-1)} + 4n(n+1)L_{n-1}$.

B) $L_{n+1} = (n+1)^2 P_{n-1}^{(n-1)} + 4n(n+1)L_n$.

C) $L_{n+1} = 2(n+1)(2n+1)P_n^{(n-1)} + 4n(n+1)L_{n-1}$.

D) $L_{n+1} = (n+1)(2n-1)P_n^{(n-1)} - 4n(n+1)L_{n-1}$.

Question 32 On obtient finalement pour $n \in \mathbb{N}^*$ la relation permettant d'exprimer L_{n+1} en fonction de L_n et de L_{n-1}.

A) $L_{n+1} = 2(n+1)XL_n - 4(n-1)^2 L_{n-1}$.

B) $L_{n+1} = 2(n+1)XL_n - 4n^2 L_{n-1}$.

C) $L_{n+1} = 2(n+1)XL_n + 4n^2 L_{n-1}$.

D) $L_{n+1} = 2(n+1)XL_n + 4(n-1)^2 L_{n-1}$.

Question 33 La relation exprimant L_{n+1} en fonction de L_n et de L_{n-1} permet ainsi de calculer les différents polynômes L_n .Ainsi on obtient pour L_4 l'expression suivante.

A) $L_4 = 35(48X^4 - 30X^2 + 3)$.

B) $L_4 = 42(40X^4 - 30X^2 + 3)$.

C) $L_4 = 48(35X^4 - 30X^2 + 3)$

D) $L_4 = 40(42X^4 - 30X^2 + 3)$

Si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ on associe à $\mathbb{R}[X]$ le produit scalaire

$$< P|Q >= \int_{-1}^{1} P(X)Q(X)dX$$

Question 34 En procédant à des intégrations par parties successives on montre que pour $m < n$:

A) $< L_n|X^m >= (-1)^{k+1}m(m-1)....(m-k)\int_{-1}^{1}\dfrac{d^{n-k}}{dX^{n-k}}(X^2-1)^n X^{m-k}dX$.

B) $< L_n|X^m >= (-1)^{k}m(m-1)....(m-k)\int_{-1}^{1}\dfrac{d^{n-k}}{dX^{n-k}}(X^2-1)^n X^{m-k}dX$.

C) $< L_n|X^m >= (-1)^{m}m!\int_{-1}^{1}\dfrac{d^{n-m+1}}{dX^{n-m+1}}(X^2-1)^n XdX$.

D) $< L_n|X^m >= (-1)^{m-1}m!\int_{-1}^{1}\dfrac{d^{n-m+1}}{dX^{n-m+1}}(X^2-1)^n XdX$.

Question 35 On en déduit que pour $m < n$:

A) $< L_n|X^m >= (-1)^m m!$

B) $< L_n|X^m >= (-1)^{m-1}(m-1)!$

C) $< L_n|X^m >= (n-m)!$

D) $< L_n|X^m >= 0$

Question 36 On peut en déduire alors si m est différent de n :

A) $< L_n|L_m >= (-1)^{m+n}(m+n)!$

B) $< L_n|L_m >= (-1)^{m-1}(m-1)!$

C) Si $n > m$ alors $< L_n|L_m >= (-1)^{n-m}(n-m)!$

D) $< L_n|L_m >= 0$

On se propose de calculer $||L_n||$ à partir du calcul de $J = ||L_n||^2$.

Question 37 En intégrant n fois par parties l'intégrale J, on obtient :

A) $J = \int_{-1}^{1}(X^2-1)^n \dfrac{d^{2n+1}}{dX^{2n+1}}(X^2-1)^n dX$

B) $J = (-1)^n \int_{-1}^{1}(X^2-1)^n \dfrac{d^{2n+1}}{dX^{2n+1}}(X^2-1)^n dX$

C) $J = (-1)^n \int_{-1}^{1}(X^2-1)^n \dfrac{d^{2n}}{dX^{2n}}(X^2-1)^n dX$

D) $J = \int_{-1}^{1}(X^2-1)^n \dfrac{d^{2n+1}}{dX^{2n+1}}(X^2-1)^n dX$

Question 38 On obtient alors comme expression de $||L_n||^2$:

A) $||L_n||^2 = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{2n+1}$

B) $||L_n||^2 = \dfrac{2^{2n+1}(n!)^2}{2n+1}$

C) $||L_n||^2 = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$

D) $||L_n||^2 = 1$

Question 39 On se place maintenant dans $\mathbb{R}_3[X]$ et on considère la famille constituée par les polynômes L_0, L_1, L_2, L_3 et on cherche à exprimer un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ sous la forme :

$$\alpha L_0 + \beta L_1 + \gamma L_2 + \delta L_3$$

A) La décomposition n'est pas unique.

B) La décomposition est unique car la famille est orthogonale.

C) La décomposition est unique si on impose $\alpha + \beta + \gamma + \delta = (-1)^3$

D) La décomposition est unique si on impose $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$

Question 40 Soit le polynôme $Q = X^3 - 1$ on peut écrire Q sous la forme :

A) $Q = \frac{1}{2}L_0 + \frac{3}{2}L_1 - \frac{3}{2}L_2 + \frac{1}{2}L_3.$

B) $Q = \frac{1}{2}L_0 + \frac{3}{2}L_1 - \frac{3}{2}L_2 - \frac{1}{2}L_3.$

C) $Q = L_0 + \frac{3}{2}L_1 + \frac{3}{2}L_2 + 2L_3.$

D) $Q = -L_0 + \frac{3}{10}L_1 + \frac{1}{120}L_3.$