I — Petit rappel de trigonométrie hyperbolique :

1) Définitions première formule trigonométrique (à connaitre)

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ et } \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Alors **vérifier que** $\boxed{\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1}$ et que $\boxed{\operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch}(x) \text{ et } \operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh}(x).}$

On pose $th(x) = \dfrac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = 1 - \dfrac{2}{e^{2x} + 1}$

Vérifier que $\operatorname{th}'(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2(x)} = 1 - \operatorname{th}^2(x)$

On pose $coth(x) = \dfrac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(x)} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \dfrac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$

Vérifier que $coth'(x) = \dfrac{-1}{\operatorname{sh}^2(x)} = 1 - coth^2(x)$.

2) Formules de duplications (à savoir retrouver) :

Vérifier que :

$$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y) \text{ et } \operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y).$$

En déduire par parité, les formules $\operatorname{sh}(x-y) = \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y) - \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y)$ et $\operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) - \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y)$.

3) Dérivées de fonction hyperboliques réciproques :

Pour x, y réels, $argsh(y) = x \Leftrightarrow y = \operatorname{sh}(x)$.
Par formule de dérivation de la fonction réciproque,

$$argsh'(y) = \frac{1}{\operatorname{ch}(argsh(y))} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}^2(argsh(y)) + 1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}}.$$

De même, vérifier que pour $x \in [1, +\infty[$ et $y \in [0, +\infty[$, $argch(y) = x \Leftrightarrow y = \operatorname{ch}(x)$ puis que

$$argch'(y) = \frac{1}{\operatorname{sh}(argch(y))} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2(argch(y)) - 1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}.$$

4) Formes logarithmiques (à savoir retrouver) :

$\operatorname{sh}(x) = y \Leftrightarrow \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = y \Leftrightarrow \dfrac{X - 1/X}{2} = y \Leftrightarrow \dfrac{X^2 - 1}{2X} = y$ en posant $X = e^x$.
L'équation $X^2 - 1 = 2Xy \Leftrightarrow X^2 - 2yX - 1 = 0$ est polynômiale du second degré en X.
Ses solutions sont $X_1 = y + \sqrt{y^2 + 1}$ et $X_2 = y - \sqrt{y^2 + 1}$
Or $X = e^x > 0$ donc la seconde solution ne convient pas.
Finalement, $e^x = X_1 = y + \sqrt{y^2 + 1}$ et

$$x = argsh(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

Vérifier que

$$argch(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

En combinant les deux derniers résultats, on peut retenir que

$$\int^x \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \text{ et } \int^x \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} = \ln(y + \sqrt{x^2 - 1})$$