I — TD : equations différentielles

Exercice 1 : Raccordement des solutions- tous les cas possibles

Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ *des équations différentielles suivantes :*

1. $ty' - 2y = t^3$;
2. $t^2y' - y = 0$;
3. $(1-t)y' - y = t$.

Exercice 2 : Abaissement de l'ordre

On considère l'équation différentielle notée (E) *:*

$$(t^2+t)x'' + (t-1)x' - x = 0.$$

1. *Déterminer les solutions polynômiales de* (E).
2. *En déduire toutes les solutions de* (E) *sur* $]1, +\infty[$.
3. *Reprendre le même exercice avec*
$$t^2x'' - 3tx' + 4x = t^3$$
dont on déterminera les solutions sur $]0, +\infty[$. *On cherchera d'abord les solutions polynômiales de l'équation homogène !*

Exercice 3 : Avec des séries entières

On considère l'équation différentielle

$$xy'' - y' + 4x^3y = 0 \qquad (E)$$

dont on se propose de déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$.

1. *Question préliminaire : soient* a, b, c, d *4 réels et* $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ *définie par*
$$f(x) = \begin{cases} a\cos(x^2) + b\sin(x^2) & \text{si } x > 0 \\ c\cos(x^2) + d\sin(x^2) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$
A quelle condition sur a, b, c, d *la fonction* f *se prolonge-t-elle en une fonction de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}$ *?*
On recherche les solutions de (E) *qui sont développables en série entière au voisinage de 0. On note* $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *une telle solution, lorsqu'elle existe, et on désigne par* R *son rayon de convergence.*
2. *Montrer qu'il existe une relation de récurrence, que l'on explicitera, entre* a_{n+4} *et* a_n.
3. *Pour* $p \in \mathbb{N}$, *déterminer* a_{4p+1} *et* a_{4p+3}.
4. *Pour* $p \in \mathbb{N}$, *déterminer* a_{4p} *en fonction de* a_0 *et de* p *(respectivement* a_{4p+2} *en fonction de* a_2 *et* p*).*
5. *Quel est le rayon de la série entière obtenue ? Exprimer la comme combinaison linéaire de deux fonctions "classiques".*
6. *Soit* S *le* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel des applications de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *qui sont solutions de* (E) *sur* $\mathbb{R}$. *Préciser une base de* S.

Exercice 4 : Solutions DSE puis abaissement de l'ordre

Pour les équations différentielles suivantes :

— *Chercher les solutions développables en séries entières*
— *Résoudre complètement l'équation sur un intervalle bien choisi par la méthode d'abaissement de l'ordre*
— *Résoudre l'équation sur* $\mathbb{R}$.

$$\mathbf{1}.\ xy'' + 2y' - xy = 0 \qquad \mathbf{2}.\ x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0.$$

Exercice 5 : Changement de fonction inconnue - et on retrouve des coefficients constants...

Résoudre sur $\mathbb{R}$ *les équations différentielles suivantes :*

1. $(1+e^x)y'' + 2e^xy' + (2e^x+1)y = xe^x$ *en posant* $z(x) = (1+e^x)y(x)$;
2. $xy'' + 2(x+1)y' + (x+2)y = 0$, *en posant* $z = xy$.

Exercice 6 : Varions la constante...

Résoudre l'équation différentielle $y'' + 4y = \tan t$.

Exercice 7 : Comportement à l'infini des systèmes 2x2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *une matrice complexe. Montrer que toutes les solutions du système* $X'(t) = AX(t)$ *tendent vers 0 en* $+\infty$ *si et seulement si les valeurs propres de* A *sont toutes de partie réelle strictement négative.*

corrigés de cette feuille : `http://www.bibmath.net/ressources/justeunefeuille.php?id=12665`