Exercices TD 5/2

Exercice 1 : Réunion et intersections d'ouverts et fermés

Dans un espace vectoriel normé E, on désigne par $B_r(a)$ et $B'_r(a)$ les boules, respectivement ouvertes et fermées de centre a et de rayon r.

1. *Déterminer $\cap_{n=1}^{+\infty} B_{1+1/n}(a)$. Qu'en déduit-on ?*
2. *Déterminer $\cup_{n=1}^{+\infty} B'_{1-1/n}(a)$. Qu'en déduit-on ?*

Exercice 2 : Boule unité

Montrer que N définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $N((x,y)) = \max(|x|,|y|,|x-y|)$ est une norme et dessiner la boule de centre 0 et de rayon 1.

Exercice 3 : Comparaison de normes

Soit E l'espace vectoriel réel $\mathcal{C}^1([0,1,\mathbb{R})$ et N l'application de E dans $\mathbb{R}_+$ définie par $N(f) = \sqrt{f^2(0) + \int_0^1 f'^2}$ Montrer que N est un norme et comparer N et $||.||_\infty$.

Exercice 4 : Densité

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, on considère l'ensemble D des matrices diagonalisables.
Démontrer que D est une partie dense de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On pourra essayer de modifier un coefficient à l'aide de la suite $(1/n)$ et étudier son polynôme caractéristique.

Exercice 5 : Densité 2

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme $||P|| = \sup\{|P(t)|; t \in [-1,1]\}$.
Vérifier que $||.||$ est une norme et démontrer que l'ensemble des polynômes nuls en 2 est une partie dense de E.

Exercice 6 : Normes classiques sur les polynômes

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes. On définit sur E trois normes par, si $P = \sum_{i=0}^{p} a_i X^i$:

$$N_1(P) = \sum_{i=0}^{p} |a_i|,\ N_2(P) = \left(\sum_{i=0}^{p} |a_i|^2\right)^{1/2},\ N_\infty(P) = \max_i |a_i|.$$

On admet qu'il s'agit de 3 normes sur $\mathbb{R}[X]$. Sont-elles équivalentes deux à deux ? On pourra utiliser la suite de polynômes $P_n = 1 + X + \ldots + X^n$.

Exercice 7 : Convergence des suites extraites

Soit (u_n) une suite de nombres réels.

1. *On suppose que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite. Prouver que (u_n) est convergente.*
2. *Donner un exemple de suite telle que (u_{2n}) converge, (u_{2n+1}) converge, mais (u_n) n'est pas convergente.*
3. *On suppose que les suites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) sont convergentes. Prouver que (u_n) est convergente.*

Exercice 8 : Suite de rationnels convergeant vers un irrationnel

1. *Montrer qu'une suite (u_n) de réels ne tend pas vers $+\infty$ si et seulement si on peut en extraire une suite majorée.*
2. *Montrer que, de toute suite (q_n) d'entiers naturels qui ne tend pas vers $+\infty$, on peut extraire une suite constante.*
3. *Soit x un irrationnel et (r_n) une suite de rationnels convergeant vers x. Pour tout entier n, on écrit $r_n = \frac{p_n}{q_n}$ avec $p_n \in \mathbb{Z}$ et $q_n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que (q_n) tend vers $+\infty$.*