Exercice 1 :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle. Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, on définit :

$$\Phi_f : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{L}(E) \\ g & \mapsto & f \circ g \end{array}.$$

1. *Vérifier que pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, $\Phi_f \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$.*
2. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{K}[X], P(\Phi_f) = \Phi_{P(f)}$.*
3. *En déduire que Φ_f est diagonalisable si, et seulement si f l'est.*
4. *Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Décrire* $\mathrm{Ker}(\Phi_f - \lambda Id_{\mathcal{L}(E)})$ *à l'aide de* $\mathrm{Ker}(f - \lambda Id_E)$.

Exercice 2 : Diagonalisation

Soient un entier $n \geqslant 3$ et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Déterminer les éléments propres de A. Est-elle diagonalisable ? Que vaut son déterminant ?

Exercice 3 : Réduction

Soient un entier $n \geqslant 2$ et

$$A = \begin{pmatrix} b & & a \\ & \ddots & \\ a & & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

avec $a \neq 0$.

1. *Déterminer un polynôme annulateur de A.*
2. *A est -elle diagonalisable ? Déterminer ses valeurs propres et les dimensions de ses sous-espaces propres.*
3. *Calculer* $\det(A)$.