Travaux dirigés 5/2

Exercice 1 : PGCD de P et P'

Soient $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

1. *Si P et Q sont à coefficients dans $\mathbb{K}$, montrer que les divisions euclidiennes de P par Q dans $\mathbb{K}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$ donnent le même résultat.*
2. *En déduire que les PGCD de P et Q sont les mêmes dans $\mathbb{K}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.*
3. *Montrer que P n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$ si et seulement si le PGCD unitaire de P et P' dans $\mathbb{K}[X]$ vaut 1.*
4. *Calculer le PGCD de P et P' si P est scindé dans $\mathbb{K}$.*

Exercice 2 : Éléments propres

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour $P \in \mathbb{K}[X]$, on pose : $\Phi(P) = (2x+1)P - (X^2-1)P'$.

1. *Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.*
2. *Soit P un vecteur propre de Φ. Montrer que $P' \neq 0$ et en déduire que le degré de P est égal à 2.*
3. *Déterminer toutes les valeurs propres de Φ et les espaces propres associés (on trouvera $Sp(\Phi) = \{1, (-1), 3\}$).*

Exercice 3 : Élements propres 2

Soient E l'espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on définit une application $T_f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par $T_f(0) = f(0)$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, T_f(x) = \dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. *Montrer que pour tout $f \in E, T_f \in E$.*
2. *Soit $T : E \to E$ tel que $T(f) = T_f$. Montrer que T est linéaire.*
3. *Montrer que $Sp(T) =]0,1]$ et déterminer les espaces propres associés (on distinguera rigoureusement plusieurs cas).*

Exercice 4 : Diagonalisation/Trigonalisation

Diagonaliser la matrice $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -10 & -5 & 2 \end{pmatrix}$ *puis trigonaliser la matrice* $\begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 5 : Diagonalisation simultanée

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

1. *Soient f et g deux endomorphismes diagonalisables de E. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :*
   — *il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $Mat_{\mathcal{B}}(f)$ et $Mat_{\mathcal{B}}(g)$ sont des matrices diagonales.*
   — $f \circ g = g \circ f$
2. *Soit A un sous ensemble non vide de $\mathcal{L}(E)$ dont tous les éléments sont diagonalisables. On suppose que pour tout $(f,g) \in A^2, f \circ g = g \circ f$.*
   a. *Montrer que si tous les éléments de A sont des homothéties, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\forall f \in A$, $Mat_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale.*
   b. *On suppose maintenant qu'il existe $f_0 \in A$ qui n'est pas une homothétie. Montrer que f admet au moins 2 espaces propres distincts.*
   c. *On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition H_n : "Si E est de dimension n, A un sous ensemble non vide de $\mathcal{L}(E)$ dont tous les éléments sont diagonalisables et commutent 2 à 2, alors ces éléments sont diagonalisables dans une base commune $\mathbb{B}$."*
   Montrer que H_n est vraie par récurrence.

Exercice 6 :

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f est diagonalisable ssi tout espace F de E tel que $f(F) \subset F$ admet un supplémentaire G tel que $f(G) \subset G$.