Complément TD espaces préhilbertiens.

Exercice 1 : Série de Fourier

On considère E l'ensemble des fonctions f continues de $\mathbb{R}$ ndas $\mathbb{R}$, 2π-périodiques et paires.
On munit E de la fonction $<|>$ définie par :

$$< f|g >= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)g(t)dt.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $c_n : x \mapsto \sqrt{2}\cos(nx)$ si $n \geqslant 1$ et $c_0 : x \mapsto 1$ sinon.

1. *Montrer que $<|>$ définit un produit scalaire sur E.*
2. *Montrer que la suite (c_n) est orthonormale.*
3. *Si $f \in E$ et $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que*
$$\forall x \in [0,\pi], |f(x) - P(\cos x)| \leqslant \varepsilon.$$
4. *En déduire que la suite (c_n) est totale.*
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $f \in E$, on note $a_n(f) =< c_n|f >$ puis $S_n(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k(f)c_k$.
5. *Montrer que $(S_n(f))$ est une suite convergente vers f pour la norme associée au produit scalaire $<|>$.*
6. *On suppose que $\sum a_n$ est absolument convergente. Montrer que*
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(f)c_n(x).$$

Exercice 2 : Formes quadratiques

Soient E un espace euclidien de dimension n. On dit qu'un endomorphisme u est E est symétrique lorsque $\forall (x,y) \in E^2, < u(x)|y >=< x|u(y) >$.
Soient p endomorphismes symétriques $u_1,\dots,u_p$. Pour $i \in \{1,\dots,p\}$, on note $q_i : x \mapsto< u_i(x)|x >$.
On suppose que $\forall x \in E, q_1(x) + \cdots q_p(x) = ||x||^2$ et que $rg(u_1) + \cdots + rg(u_p) = n$.

1. *Montrer que $u_1 + \cdots + u_p = id_E$.*
2. *Montrer que $Im(u_1) \oplus \cdots \oplus Im(u_p) = E$.*
3. *Montrer que si u est un projecteur et si u est symétrique, alors u est un projecteur orthogonal.*
4. *Montrer enfin que les u_i sont en fait des projecteurs orthogonaux et que la somme directe précédente est orthogonale.*

Exercice 3 : Quotients de Rayleigh

Soient E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique (voir exercice précédent).

1. *Montrer qu'il existe α et β des réels qu'on exprimera en fonction de valeurs propres de u tels que*
$$\forall x \in E, \alpha||x||^2 \leqslant< u(x)|x >\leqslant \beta||x||^2.$$
2. *Montrer que si pour $x \neq 0$, l'une ou l'autre des inéaglités précédentes est une égalité, alors x est un vecteur propre de u.*
3. *On note $\lambda_1 \leqslant \cdots \lambda_n$ les valeurs propres de u. Soit $(e_1,\dots e_n)$ une BON de E telle que $\forall i \in \{1,\dots,n\}, < u(e_i)|e_i >= \lambda_i$.*
Montrer que $\forall i \in \{1,\dots,n\}, u(e_i) = \lambda e_i$.

Exercice 4 : Distance

Montrer que

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt = \frac{1}{180}.$$