Travaux dirigés 5/2

Exercice 1 : Groupe engendré

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Quel est le groupe engendré par A et B (on précisera pour quelle loi) ?

Exercice 2 : Centre de $\mathcal{S}_n$

Démontrer que le centre du groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ (c'est à dire l'ensemble des éléments de $\mathcal{S}_n$ qui commutent avec tous les autres éléments) est réduit à $\{I_d\}$ pour $n \geqslant 3$.

Exercice 3 : Groupe orthogonal et symétries

Soit a et b deux vecteurs distincts de E et de même norme.
Montrer qu'il existe une unique réflexion s de E telle que $s(a) = b$ et $s(b) = a$.
Montrer que $O(E)$ est engendré par les réflexions.
On pourra montrer par récurrence sur $dim(E) - dim(Ker(f) - Id))$ que f peut d'écrire comme composée de réflexions.

Exercice 4 : Automorphismes intérieurs

Soit G un groupe. Pour a dans G, on note $f_a : G \to G$ tel que $f_a(x) = a^{-1}xa$.
Montrer que pour tout $a \in G$, f_a est un automorphisme de G.
Montrer que $\phi : G \to Aut(G)$ tel que $\phi(a) = f_a$ est un morphisme de groupes.
Déterminer le noyau de ϕ.

Exercice 5 : Le groupe des inversible d'un corps fini est cyclique

Soit G un groupe fini de neutre e.
On note m le ppcm des ordres des éléments de G et $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_d^{\alpha_d}$ sa décomposition en facteurs premiers.
Montrer que pour $i \in [1, d]$, G admet un élément d'ordre $p_i^{\alpha_i}$.
Montrer que G admet un élément d'ordre m.
Soit $\mathbb{K}$ un corps fini.
Montrer que $(\mathbb{K}^*, \cdot)$ est un groupe cyclique. On pourra considérer la polynôme $X^m - 1$.

Exercice 6 : $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$

Soit $P = \mathbb{Z} \cup \{\sqrt{2}\}$. Montrer que le sous-anneau de $\mathbb{R}$ engendré par P est $A = \{m + n\sqrt{2} : (m, n) \in \mathbb{Z}^2\}$.
Comme pour les groupes, il s'agit du plus petit sous-anneau de $\mathbb{R}$ contenant P.
On note U le groupe des éléments inversibles de A.
On note $N(m + n\sqrt{2}) = |m^2 - 2n^2|$.
Pour a, b éléments de A, calculer $N(ab)$ Montrer que $z \in U$ si et seulement si $N(z) = 1$.
Soit $z \in U$ tel que $z = x + y\sqrt{2}$ avec $(x, y) \in \mathbb{N}^2$, $x \neq 0$.
Montrer qu'il existe un unique $n \in \mathbb{N}$ tel que $(1 + \sqrt{2})^n \leqslant z < (1 + \sqrt{2})^{n+1}$, puis que $z(1 + \sqrt{2})^{-n}$ s'écrit sous la forme $x' + y'\sqrt{2}$ avec x', y' dans $\mathbb{N}$.
Montrer que $U = \{\pm(1 + \sqrt{2})^n | n \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 7 : Congruences

Résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ l'équation $3x + 2 = -1$
Résoudre :

$$\begin{cases} 5x + 2y &= 1[6] \\ 2x + 4y &= 2[6] \end{cases}$$

Résoudre :

$$\begin{cases} 5x + 2y &= 3[6] \\ 2x + 4y &= 1[5] \end{cases}$$

Exercice 8 : Réciproque au théorème chinois ?

Soient p et q deux entiers. Montrer l'équivalence suivante :
le groupe produit $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ est cyclique si et seulement si p et q sont premiers entre eux.

Exercice 9 : Nombres de Fermat

Montrer que si $2^\alpha + 1$ est premier, alors a est une puissance de 2.
Pour tout entier n, on note $F_n = 2^{2^n} + 1$. Montrer que si m et n sont distincts, alors F_m et F_n sont premiers entre eux.