## EXERCICE 3
## Etude d'une marche aléatoire

### Partie I - Calcul des probabilités

**Q28.** A l'instant 0, le pion est en $A$ donc $p_0 = 1$ et $q_0 = r_0 = 0$.
A l'instant 1, la probabilité qu'il reste en $A$ est $\frac{1}{2}$ donc $p_1 = \frac{1}{2}$. Sinon, il se déplace de manière équiprobable sur l'un des deux autres points donc $q_1 = r_1 = \frac{1}{4}$.

**Q29.** Soit $n \in \mathbb{N}$.
Pour $n = 0$, on a bien $V_1 = MV_0$.
On suppose maintenant $n \in \mathbb{N}^*$.
$\{A_n, B_n, C_n\}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles donc, d'après la formule des probabilités totales,

$$P(A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1})$$

$P_{A_n}(A_{n+1})$ est la probabilité de rester en $A$ de l'instant $n$ à l'instant $n+1$ donc $\frac{1}{2}$.
$P_{B_n}(A_{n+1})$ est la probabilité de passer de $B$ à $A$ donc $\frac{1}{4}$. De même, $P_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4}$.
Par conséquent, $P(A_{n+1}) = \frac{1}{2}P(A_n) + \frac{1}{4}P(B_n) + \frac{1}{4}P(C_n)$.
On raisonne de même pour exprimer $b_{n+1}$ et $c_{n+1}$ et on conclut que $V_{n+1} = MV_n$.

**Q30.** Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$ : "$V_n = M^n V_0$".
$M^0 = I_3$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.
D'après la question précédente, $V_{n+1} = MV_n$ et, d'après l'hypothèse de récurrence, $V_n = M^n V_0$ donc $V_{n+1} = MM^nV_0 = M^{n+1}V_0$ : $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Par récurrence, on peut alors conclure que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = M^n V_0$.
$V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc, en utilisant le résultat admis sur $M^n$ :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ p_n = \frac{4^n + 2}{3 \cdot 4^n}, \ q_n = r_n = \frac{4^n - 1}{3 \cdot 4^n}$$

**Q31.** Quand $n$ tend vers l'infini, $4^n + 2 \sim 4^n$ et $4^n - 1 \sim 4^n$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \lim\limits_{n \to +\infty} q_n = \lim\limits_{n \to +\infty} r_n = \frac{1}{3}$.
Cela signifie que, si on observe la position du pion après un grand nombre d'étapes, il y a autant de chances qu'il soit en $A$, en $B$ ou en $C$.

### Partie II - Nombre moyen de passages en $A$.

**Q32.** $X_1 + \cdots + X_n$ est le nombre de passages par le point $A$ lors des $n$ premières étapes et $E(X_1 + \cdots + X_n)$ est le nombre moyen de passages par $A$ lors des $n$ premières étapes.

**Q33.** $X_n$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $p = P(A_n) = \frac{4^n + 2}{3 \cdot 4^n}$ donc $E(X_n) = \frac{4^n + 2}{3 \cdot 4^n}$.

**Q34.** $a_n = E(X_1 + \cdots + X_n)$ donc, par linéarité de l'espérance, $a_n = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$ et, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^i\right) \\ &= \frac{n}{3}+\frac{2}{3}\frac{1}{4}\frac{1-\dfrac{1}{4^n}}{1-\dfrac{1}{4}} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$a_n = \frac{n}{3}+\frac{2}{9}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)$$

### Partie III - Temps d'attente avant le premier passage en $B$

**Q35.** Comme le pion est en $A$ à l'instant 0, $(T_B=1)=B_1$ d'où $P(T_B=1)=\dfrac{1}{4}$.

$$\begin{aligned} (T_B=2) &= \overline{B_1}\cap B_2 \\ &= (A_1\cap B_2)\cup(C_1\cap B_2) \end{aligned}$$

Ces deux événements sont incompatibles donc $P(T_B=1)=P(A_1\cap B_2)+P(C_1\cap B_2)$.
Par définition d'une probabilité conditionnelle, $P(A_1\cap B_2)=P(A_1)P_{A_1}(B_2)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{8}$.
De même $P(C_1\cap B_2)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{16}$.
Finalement, $P(T_B=2)=\dfrac{3}{16}$.

**Q36.** A l'instant $n$, le pion est en $A$, en $B$ ou en $C$ donc $\overline{B_n}=A_n\cup C_n$.

**Q37.** $\overline{B_1}\cap\overline{B_2}=(A_1\cup C_1)\cap(A_2\cup C_2)=(A_1\cap A_2)\cup(A_1\cap C_2)\cup(C_1\cap A_2)\cup(C_1\cap C_2)$.
En prenant l'intersection avec $B_3$ on obtient 4 événements deux à deux incompatibles donc
$P(B_3\cap\overline{B_1}\cap\overline{B_2}=P(B_3\cap A_1\cap A_2)+P(B_3\cap A_1\cap C_2)+P(B_3\cap C_1\cap A_2)+P(B_3\cap C_1\cap C_2)$.
$P(B_3\cap A_1\cap A_2)=P(A_1\cap A_2)P_{A_1\cap A_2}(B_3)=P(A_1\cap A_2)P_{A_2}(B_3)$ car la position à l'instant 3 ne dépend que la position à l'instant 2. Ainsi $P(B_3\cap A_1\cap A_2)=\dfrac{1}{4}P(A_1\cap A_2)$.
On procède de même avec les 3 autres termes puis on se retrouve avec la somme de 4 probabilités d'événements incompatibles. On utilise la relation du début de cette question pour conclure :

$$P(B_3\cap\overline{B_1}\cap\overline{B_2})=\frac{1}{4}P(\overline{B_1}\cap\overline{B_2})$$

Avec la définition d'une probabilité conditionnelle, $P(B_3|\overline{B_1}\cap\overline{B_2})=\dfrac{1}{4}$

**Q38.** Soit $k\in\mathbb{N}^*$.
$(T_B=k)=\left(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{k-1}\overline{B_i}\right)\cap B_k$. Avec la définition d'une probabilité conditionnelle et le résultat admis,
$P(T_B=k)=\dfrac{1}{4}P\left(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{k-1}\overline{B_i}\right)$.
$\displaystyle\bigcap_{i=1}^{k-1}\overline{B_i}=(T_B\geq k)=(T_B=k)\cup(T_B\geq k+1)$ donc $P(T_B=k)=\dfrac{1}{4}(P(T_B=k)+P(T_B\geq k+1)=$ $\dfrac{1}{4}(P(T_B=k)+4P(T_B=k+1))$ d'où $P(T_B=k+1)=\dfrac{3}{4}P(T_B=k)$. De plus $P(T_B=1)=\dfrac{1}{4}$ donc,

pour $k \geq 1$, $P(T_B = k) = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{k-1}$.

$\{T_B = k;\ k \in \mathbb{N}\}$ est un système complet d'événements donc $P(T_B = 0) = 1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(T_B = k) =$ $1 - \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{1-\dfrac{3}{4}}$.

Par conséquent, $P(T_B = 0) = 0$.

**Q39.** Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(T_B = k) = \dfrac{1}{4}\left(1 - \dfrac{1}{4}\right)^{k-1}$ donc $T_B$ suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{4}$.
On en déduit que $T_B$ admet une espérance et $E(T_B) = 4$.